Zamanla Değişen Konveks Fonksiyonların Modüler Optimizasyonu
Modular Optimization of Time-Varying Convex Functions

Halil Yiğit Öksüz

Kontrol Sistemleri Grubu,
Bilişsel Süreçlerin Modellenmesi Grubu,
Science of Intelligence (the Excellence Cluster),
Elektrik Mühendisliği ve Bilgisayar Bilimleri Bölümü,
TU Berlin, Berlin
oksuz@tu-berlin.de

Özetçe

Bu çalışmada, zamanla değişen konveks fonksiyonların modüler optimizasyonu ele alınmıştır. Zamanla değişim birbirinden farklı sonlu sayıda konveks fonksiyonlar arası geçişler ile tanımlanmış olup, geçiş olasılıklarının ve geçişin meydana geldiği anların bilinmediği ergodik bir Markov zinciri ile modellenebildiği durumlarda, herhangi bir ekstra bilgiye sahip olmaksızın, birbirinden farklı sonlu sayıda konveks fonksiyonun interaktif optimizasyonunu gerçekleştirebilen modüler bir algoritma önerilmiştir. Modüller birbirlerinin gradyan bilgilerini paylaşarak, interaktif bir şekilde, tanimlanan bu optimizasyon problemini çözebildikleri benzetim çalışmalarında gösterilmiştir. Ek olarak, önerilen yöntemin fonksiyonun zamanla değişiminin çok hızlı olduğu durumlarda dahi, başarılı olduğu gözlemlenmiştir.

Abstract

In this study, modular optimization of time-varying convex functions is discussed. Under the assumption that the time variation is defined by transitions between a finite number of convex functions that differ from each other, a modular algorithm is proposed that can perform interactive optimization of these finite number of convex functions without any extra information when the transition probabilities and the exact moments of occurrence of the transitions are unknown, and can be modeled with an ergodic Markov chain. It has been shown in simulation studies that modules can solve this optimization problem by interactively sharing their gradient information. In addition, it has been observed that the proposed method is successful even in cases where the time variation is very fast.

1. Giriş

Konveks optimizasyon, konveks amaç fonksiyonlarına en uygun çözümleri verimli bir şekilde bulmak için matematiksel olarak titiz bir çerçeve sağlamakla birlikte optimal kontrol teorisi, dağıtık sistemlerin optimizasyonu ve makine öğrenimi dahil olmak üzere çeşitli alanlarda mevcut optimizasyon problemlerini çözmek için temel bir araç olmuştur. Ancak, birçok gerçek dünya senaryosu, kısıtlamaların ve hedeflerin zaman içinde değiştiği dinamik sistemleri içerir. Zamanla değişen bu kısıtlamalardan kaynaklanan doğal karmaşıklıklar, dinamik sistemlerde verimli ve etkili optimizasyon elde etmede önemli zorluklar yaratması sebebiyle, özel metodolojilerin ve algoritmaların kullanımını gerektirir [1].

Zamanla değişen optimizasyon problemleri, maliyet fonksiyonu ve kısıtlamalar zaman içinde sürekli olarak değişebildiğinden, zamanla değişmeyen programların doğal bir uzantısını temsil eder [2]. Son zamanlarda, zamanla değişen optimizasyon formulasyonları ve beraberindeki çevrimiçi çözücüler, hem sürekli-zaman [3, 4] hem de ayrık-zaman [5] senaryoları için önerilmiştir. Bu çalışmaların ana hedefleri, sürekli değişen optimizasyon programlarının optimize edicilerinin yörüngelerini takip edebilen algoritmalar geliştirmektir. Ortaya çıkan algoritmik yapılar, takip yeteneklerini hesaplama karmaşıklığıyla ilişkilendirilen hata sınırları ile birlikte yakınsama oranları açısından güvenilir performans göstermiştir.

Zamanla değişen konveks optimizasyon algoritmaları, birçok mühendislik alanında, geniş ölçekte dinamik optimizasyon görevlerinin üstesinden gelmek için çekici bir aday haline gelmektedir. Örneğin, zamanla değişen optimizasyon problemleri, zamanla değişen bir parametreye bağlı olan problemler olduğundan, sıklıkla robotik sistemlerde ortaya çıkar. Güvenli navigasyon bağlamında, [6], [7] çalışmaları robotun konumuna bağlı olan bir yerel güvenli alanı tanımlama problemini ele alir. Navigasyon için kullanılan kontrol yasası, hedefin yerel güvenli alandaki izdüşümünü izlemeyi amaçlar. Hedefin sabit olduğu durumlarda bile, yerel alanlardaki boşluğun zaman icerisinde değişmesi nedeniyle zamanla değişen bir optimizasyon problemi çözülmelidir. Ulaşım sistemleri bağlamında, trafikteki değişimler, karşıdan karşıya geçen yayalar, araba kazaları, spor etkinlikleri gibi farklı faktörlerden dolayı sistemde hızlı zaman değişimleri meydana gelebilir. Bu faktörler zamana bağlı yönlendirme ve trafik ışığı kontrol algoritmalarının kullanımını gerektirebilir [8]. Örneğin [9]'da, dinamik araç yönlendirme problemini çözmek amacıyla, makine ögrenmesine dayalı çevrimiçi bir tahminleme yöntemi sunulmuştur. Bu örneklerin yanı sıra, (zamanla değişen) konveks optimizasyon çözümleri kontrol sistemlerinde [10], güç sistemlerinde [11], makine öğrenmesi [12, 13] ve optimizasyon [14] alanlarında da oldukça sık karşımıza çıkar.

Bu çalışmada, [15–18]'den esinlenilerek, konveks fonksiyonların zamanla değişiminin, geçiş olasılıklarının ve geçişin meydana geldiği anların bilinmediği ergodik bir Markov zinciri ile modellendiği durumlar incelenmiştir. Önerilen modüler algoritma sayesinde, herhangi ekstra bir bilgiye sahip olmaksızın, sonlu sayıda ve birbirinden farklı konveks fonksiyonların interaktif optimizasyonu çevrimiçi bir şekilde gerçekleştirilmiştir. Önerilen yöntem, benzetim çalışmaları ile desteklenmiştir.

Çalışmanın geri kalanı şu şekilde organize edilmiştir: 2. Kısımda problem formülasyonu yapılmış ve önerilen algoritma sunulmuştur. Son olarak 3. Kısımda, benzetim çalışmalarına yer verilmiştir.

1.1. Notasyon

Gerçel sayıların kümesi $\mathbb{R}$ ile gösterilirken, m-boyutlu Öklidyen uzayı $\mathbb{R}^m$ ile temsil edilir. $x \in \mathbb{R}^m$ vektörü için, x^T onun transpozunu ifade eder. Sonlu bir küme S için, kardinalitesi $|S|$ ile gösterilir. Türevlenebilir bir fonksiyon $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ için $\nabla f(\mathbf{x})$, fonksiyonun $x \in \mathbb{R}^m$ noktasındaki gradyanını temsil eder.

2. Problem Formülasyonu ve Önerilen Modüler Algoritma

Bu kısımda, ilk olarak çözülmek istenen problem tanıtılacaktır. Sonrasında, bu problemin çözümü için modüler yapıya sahip bir optimizasyon algoritması sunulacaktır.

2.1. Problem Formülasyonu

$f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ zamana bağlı olarak parametrelenmiş konveks bir fonksiyon olsun, ve $f(x; k)$ ile gösterilsin. Burada, $x \in \mathbb{R}^n$ karar değişkenini ve $k \geq 0$ zamanı temsil ederken çözülmek istenen problem

$$\min_{x \in \mathbb{R}^m} f(x; k), \quad \forall k \geq 0 \tag{1}$$

ile ifade edilir. Bu varsayımlar altında, herhangi bir zaman $k \geq 0$ için, problem (1) global bir minimuma sahiptir. Bu, aşağıdaki zaman ile değişen optimal çözümün bulunabilmesini sağlar:

$$x^\star(k) := \arg\min_{x \in \mathbb{R}^m} f(x; k), \quad \forall k \geq 0. \tag{2}$$

İlk olarak, diyelim ki $F = \{f_1(x), \cdots, f_N(x)\}$ sınırlı sayıda elemanı olan ($0 < N < \infty$) ve elemaları zamanla değişmeyen bir set olsun. Bu çalışmada, [15–18]'den esinlenilerek, $f(x, k)$ fonksiyonunun zamanla değişimi, bu fonsiyonun F-setinin elemanları arasında zaman içerisinde rastgele geçiş yaptığı varsayımı altında, geçiş olasılıklarının ve geçişin meydana geldiği spesifik anların bilinmediği ergodik bir Markov zinciri ile modellenebilir. Burada dikkat etmeliyiz ki, hangi fonksiyondan hangi fonksiyona geçişin olacağının bilinmemesiyle birlikte, geçişler arasındaki zaman her iki geçiş için aynı olmasa da; rastgele bir geçiş gerçekleştikten sonra, bir sonraki geçişe kadar minimum $0 < T_{min} < \infty$ kadar zaman geçecek olmasıdır. Dahası, Markov zinciri ergodik olduğundan, F-setinin tüm elemanları sonsuz sıklıkta ziyaret edilir.

Diğer yandan, $f(x, k)$ fonksiyonunun her bir $k \geq 0$ anında konveks olması, ancak F setinin elemanları olan $f_1(x), \cdots, f_N(x)$ fonksiyonlarının da konveks olması ile mümkün olur. Bu nedenle, aşağıdaki varsayımı yapıyoruz:

Varsayım 1 *Maliyet fonksiyonları $f_i(x)$ türevlenebilir ve gradyanları bir üst sınıra sahip konveks fonksiyonlardır. Yani, herhangi bir $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^m$ ve her $i = 1, 2, \ldots, N$ için aşağıdaki eşitsizlikler geçerlidir:*

(i) $f_i(x_2) - f_i(x_1) \geq \nabla f_i(x_1)^T (x_2 - x_1)$,

(ii) $\exists L_i > 0$ *olmak üzere,* $||\nabla f_i(x)|| \leq L_i$.

Herhangi bir zamanla değişen konveks fonksiyon optimizasyonu problemi için önemli diğer bir varsayım, ardışık iki zamandaki çözümler arasındaki farkın sınırlı olmasıdır.

Varsayım 2 *Birbirini takip eden zamanlarda (rastgele) geçiş yapılan fonksiyonların mimimumları arasındaki mesafe, şu şekilde bir üst sınıra sahiptir:*

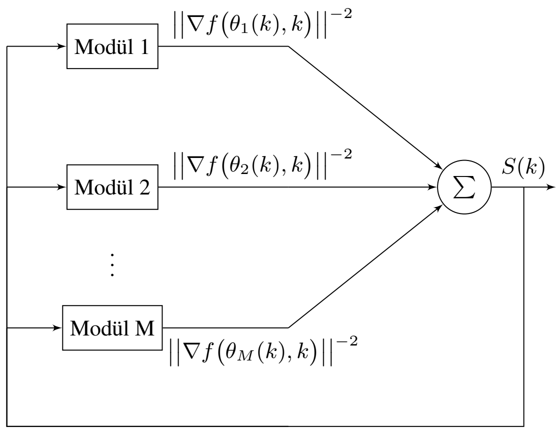
$$||x_i^* - x_j^*|| \leq K. \tag{3}$$

Burada, $0 < K < \infty$ *üst sınırı ile birlikte* $x_i^* = \arg\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m} f_i(\mathbf{x})$ *eşitliği her bir* $i = 1, 2, \cdots, N$ *için geçerlidir.*

Varsayım 1 ve Varsayım 2'nin doğru olduğunu kabul edersek, (2)'de verilen çözüm de zamana bağlı olarak değişecektir. Optimize edilecek fonksiyonun zamanda değişimi F-seti elemaları arasında olduğundan, ve rastgele bir geçiş gerçekleştikten sonra, geçişten bir önceki fonksiyonun minimum noktasından zamanla uzaklaşılır. Dahası, T_{min} değerinin beklenenden küçük olması, (2)'de verilen çözümün, F-setinde mevcut olan konveks fonksiyonların minimum değerlerine yaklasmasını, ve dahası optimal çözümün elde edilmesini bile engelleyebilir. Bu nedenle, fonksiyonun zamanla değişen yapısı, problemin tek bir eniyileyici ile çözülmesini de zorlaştırmaktadır. Bir sonraki kısımda, bu gibi problemleri ortadan kaldırmak amacıyla, modüler ve interaktif yapıda olan bir algoritma sunulacaktır.

2.2. Önerilen Gradyan Azalma Tabanlı Modüler Algoritma

Zamanla değişimin gerçekleştiği $F = \{f_1(x), \cdots, f_N(x)\}$ setinde N adet konveks fonksiyon bulunur ve önerilen algoritmada M adet gradyan azalma tabanlı optimizasyon modülü kullanılır. Bu optimizasyon modülleri, zaman içerisinde ayarlanabilir adım boyları ile her bir $k \geq 0$ anında kendi güncelleme kuralını uygular. İlk olarak, kullanılacak modüllerin lokal parametrelerini içeren set $M_I = \{\hat{x}_1, \hat{x}_2. \cdots, \hat{x}_M\}$ tanımlayalım. Sonrasında, her bir modül için birbirinden farklı başlangıç noktaları seçilir, yani herhangi iki $\hat{x}_i, \hat{x}_j \in M_I$ için $\hat{x}_i(0) \neq \hat{x}_j(0)$



Şekil 1: Optimizasyon yönteminin modüler yapısı.

sağlanır. Herhangi bir $k \geq 0$ anında i-modülü için aşağıdaki güncelleme kuralı geçerlidir:

$$\hat{x}_i(k+1) = \hat{x}_i(k) - \eta_i(k)\nabla f(\hat{x}_i(k), k). \tag{4}$$

Burada, $0 < \eta \leq 1$ olmak üzere, zamana bağlı adım boyları aşağıdaki gibi ayarlanır:

$$\begin{aligned} \eta_i(k) &= \eta \frac{||\nabla f(\hat{x}_i(k), k)||^{-2}}{S(k)}, \\ &= \eta \frac{||\nabla f(\hat{x}_i(k), k)||^{-2}}{\sum_{j=1}^{M} ||\nabla f(\hat{x}_j(k), k)||^{-2}}. \end{aligned} \tag{5}$$

Yorum 1 *Eğer herhangi iki $\hat{x}_i, \hat{x}_j \in M_I$ için $\hat{x}_i(0) \neq \hat{x}_j(0)$ sağlandığını varsayarsak ve $M \geq N$ adet modül kullanırsak, N adet modül F setindeki N adet fonksiyonun minimum noktalarına yakınsar ve $M - N$ adet modül ise başlangıç noktalarına bağlı olarak parametre uzayında bir yere yakınsarlar. Eğer $M < N$ ise, hiçbir modül yakınsayamaz, ve bu istenmeyen bir durumdur. Bu nedenle, yapılan örtük varsayım, N'nin bilindiği ya da bu değer için uygun bir üst sınırın tahnminlenebilmesidir. Dolayısıyla, uygun sayıda modülun belirlenebilmesi mümkün olur.*

Her bir $i = 1, 2, \cdots, N$ için $x_i^* = \arg\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^m} f_i(\mathbf{x})$ olsun ve $F^* = \{x_1^*, x_2^*, \cdots, x_N^*\}$ seti F setinde bulunan konveks fonksiyonların minimum noktalarını içeren bir set olsun. Burada, herhangi iki $\hat{x}_i, \hat{x}_j \in M_I$ için $\hat{x}_i(0) \neq \hat{x}_j(0)$ sağlanması büyük önem taşır. Örneğin, $M = N$ olduğu durumda her bir $\hat{x}_i, \hat{x}_j \in M_I$ için $\hat{x}_i(0) = \hat{x}_j(0)$ sağlanırsa, (4) ve (5)'de verilen güncelleme kuralı

$$\hat{x}_i(k+1) = \hat{x}_i(k) - \eta \frac{\nabla f(\hat{x}_i(k), k)}{N}$$

olarak yeniden yazılabilir ve her $k \geq 0$, $\hat{x}_i \in M_I$ için $\hat{x}_i(k) = \hat{x}_j(k)$ sağlanır. Dolayısıyla, modüllerin başlangıç noktalarının parametre uzayında rastgele bir şekilde birbirlerinden farklı olarak seçilmesi önemli bir husus haline gelmektedir.

Bütün bu bilgiler ışığında, mevcut olan teorik sonuç aşağıda sunulmuştur:

Önerme 1 *Eğer $M \geq N$ eşitsizliği sağlanırsa, her bir $x_j^* \in F^*$ için, aşağıdaki eşitliği sağlayan benzersiz bir $\hat{x}_i(k) \in M_I$ vardır:*

$$\lim_{k\to\infty} ||\hat{x}_i(k) - x_j^*|| = 0.$$

Önerme 1 aslında tüm modellerin asimptotik davranışıyla ilgilidir. Daha açık olarak amaç, her bir modülün F-setinin farklı bir elemanına yakınsadığını göstermektir. Başlangıç koşullarına ve $f(x, k)$ fonksiyonun zamana bağlı değişimine bağlı olarak, herhangi bir model, herhangi bir fonksiyonun minimum noktasına yakınsayabilir.

Yorum 2 *Herhangi bir $k \geq 0$ anında, $\nabla f(\hat{x}_i(k), k)$ terimi i-modülü tarafından hesaplanan gradyan olduğundan modellerin lokal parametreleri $\hat{x}_i(k)$ ($i = 1, 2, \cdots, M$), daha küçük gradyanlara sahip modüllerin daha büyük adım boyutlarına sahip olmasını sağlayacak bir şekilde ayarlanır. Diğer bir deyişle, herhangi bir $k = k_i$ anında $f(x, k) = f_i(x)$ olduğundan, $k = k_i$ anında küçük gradyanlara sahip modüller, $f_i(x)$ fonksiyonun minimum noktasına daha büyük adımlarla yaklaşırlar.*

Burada diğer önemli bir nokta ise, göreli konumları ne olursa olsun tüm modüllerin her an aktif olması, yani tüm modüllerin aynı anda kendi güncelleme kuralını uygulamasıdır. Başka bir deyişle, önerilen algoritma bir "kazanan hepsini alır" ilkesini izlemez, ancak herhangi bir modül F setinde bir noktaya yakınsamadığı sürece tüm modüller sıfır olmayan bir adım boyu kullanır. Bu kural, özellikle birden fazla modülün, F setindeki bir elemana yakınsamaya başladığı durumda, bu modüllerin güncelleme kurallarının kilitlenmesini önler. Matematiksel olarak, her $\hat{x}_i, \hat{x}_j \in M_I$ ve $\hat{x}_i(0) \neq \hat{x}_j(0)$ için

$$\eta_i(k) = \begin{cases} \to 1, & \text{if } ||\nabla f(\hat{x}_i(k), k)|| \to 0, \\ \to 0, & ||\nabla f(\hat{x}_j(k), k)|| \to 0, \end{cases} \tag{6}$$

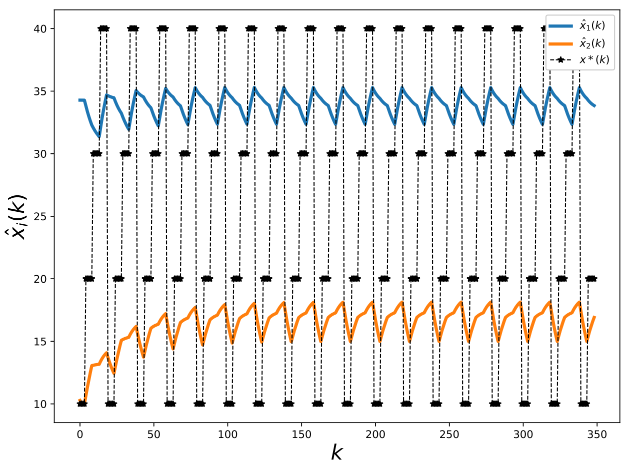
olduğunu gözlemleriz ve bu, herhangi iki modülün aynı noktaya yakınsamamasını sağlar.

Yorum 3 *Bu çalışma boyunca, $f(x, k)$ fonksiyonunun değişimi ile ilgili herhangi bir bilgi elimizde olmadığından, ve bu değişim çevrimiçi gerçekleştiğinden ötürü, N adet modülün parallel optimizasyonu istenen sonucu vermeyecektir ve bu durum, bu çalışmanın katkısını göstermektedir.*

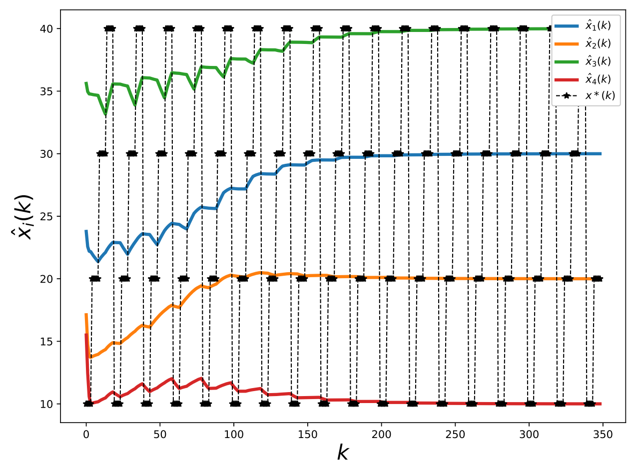
3. Benzetim Çalışmaları

Bu kısımda, önerilen algoritmanın, Varsayım 1 ve Varsayım 2'nin doğru olduğunu kabul ederek, Önerme 1'de verilen sonucu elde ettiğini benzetim çalışmaları ile göstereceğiz.

Varsayalım ki zamanla değişen $f(x; k)$ fonksiyonu, 4 adet elemanı olan ($N = 4$) ve elemanları zamanla değişmeyen konveks birer fonksiyon olan



Şekil 2: $M = 2$, $N = 4$ değerleri için modüllerin lokal parametre tahminlerinin gelişimi.



Şekil 3: $M = N = 4$ değerleri için modüllerin lokal parametre tahminlerinin gelişimi.

$$
\begin{aligned}
F &= \{f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x)\}, \\
&= \{(x-10)^2, (x-20)^2, (x-30)^2, (x-40)^2\}
\end{aligned}
$$

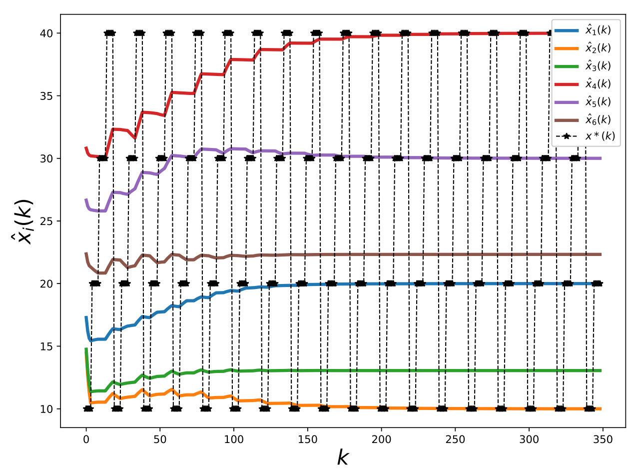
seti içerisinden değerler alarak değişsin. Bu durumda, $F^* = \{10, 20, 30, 40\}$ olur. Dahası, tüm modüller için başlangıç noktaları, rastgele bir şekilde $\mathcal{U}(10, 40)$ sürekli düzgün dağılımından seçilmiş olup, (5)'deki sabit adım boyu $\eta = 0.1$ olarak belirlenmiştir. Problem tanımına göre, diyebiliriz ki herhangi bir $k = k_i \geq 0$ anında $f(x, k) = f_i(x)$ olur ve bu fonksiyon T_{min} iterasyon süreci boyunca değişmeyecektir, ve bu değişimler F-seti elemanları arasında rastgele bir şekilde olabilir. Fakat benzetim çalışmalarında, $f(x, k)$ fonksiyonu F-seti elemanları arasında sırayla her $T_{min} = 5$ iterasyonda bir değişeceği ve F setinin tüm elemanları sonsuz sıklıkta ziyaret edileceği varsayımları altında 3 farklı durumu inceleyeceğiz.

3.1. Durum-1: $M < N$

İlk senaryoda, modül sayısı $M = 2$ olarak seçilmiştir. Önerme 1'deki koşulun sağlanmadığı ve F setinin tüm elemanları sonsuz sıklıkta sırasıyla ziyaret edileceği düşünüldüğünde, Şekil 2'den de gözlemlenebileceği üzere, herhangi bir modül için herhangi bir noktaya yakınsama durumu mümkün olmayacaktır. Dahası, modüllerin lokal parametre tahminleri, başlangıç noktalarına ve zamana bağlı olarak salınım yaparak sürekli olarak değişecektir. Bu durumda, modül sayısını arttırmamız gerekir.

3.2. Durum-2: $M = N$

Modül sayısı $M = 4$ olarak belirlendiğinde, Önerme 1'deki koşul sağlanmış olup, Şekil 3'ten de gözlemlenebileceği üzere, modüllerin lokal parametre tahminleri, F setinin birbirinden farklı her bir elemanına olacak şekilde yakınsamışlardır. Bu beklenen ve istenen bir sonuçtur. Dahası, konveks fonksiyonun



Şekil 4: $M = 6$, $N = 4$ değerleri için modüllerin lokal parametre tahminlerinin gelişimi.

zamanla değişiminin, F setinin elemanları arasında çok hızlı bir şekilde gerçekleştiği ($T_{min} = 5$) varsayımı altında, zamanla değişen minimum noktası $x^*(k)$'nın takibi literatürde mevcut kesikli zamanda gradyan azalma tabanlı algoritmalar kullanılarak istenen bir şekilde gerçekleşmeyebilir. Bu nedenle, önerilen algoritma, zamanla değişen konveks fonksiyonun bilinmeyen sonlu sayıda değişebildiği veya fonksiyonun değişiminin sonlu sayıda fonksiyonlarla kestiriminin yapılabildiği durumlar için oldukça idealdir.

3.3. Durum-3: $M > N$

Son olarak, modül sayısını $M = 6$ olarak seçersek, Şekil 4'ten de gözlemlenebileceği üzere, $N = 4$ adet modülün lokal parametreleri, yukarıda (Durum 3) olduğu gibi F setinin birbirinden farklı $N = 4$ elemanına yakınsamışlardır. Geriye kalan $M - N = 2$ adet modülün lokal parametreleri ise başlangıç noktalarına bağlı olarak parametre uzayında herhangi bir yere yakınsamışlardır. Yine Durum 2 'de olduğu gibi Önerme 1'deki koşul sağlanmış olup, istenen sonuç elde edilmiştir.

4. Sonuçlar

Bu çalışmada, konveks fonksiyonların zamanla değişiminin, geçiş olasılıklarının ve geçişin meydana geldiği anların bilinmediği ergodik bir Markov zinciri ile modellendiği durumlar incelenmiştir. Önerilen modüler algoritma sayesinde, herhangi ekstra bir bilgiye sahip olmaksızın, sonlu sayıda birbirinden farklı konveks fonksiyonların interaktif optimizasyonu çevrimçi bir şekilde gerçekleştirilmiştir. Önerilen yöntem, benzetim çalışmaları ile desteklenmiştir.

5. Teşekkür

Bu çalışma, Almanya'nın Mükemmellik Stratejisi - EXC 2002/1 "Zeka Bilimi" - proje numarası 390523135 kapsamında Deutsche Forschungsgemeinschaft (DFG, Alman Araştırma Vakfı) tarafından desteklenmiştir. Yazar ayrıca değerli katkılarından oturu Prof. Dr. Joerg Raisch'e, Prof. Dr. Henning Sprekeler'e ve Dr. Kai Gorgen'e teşekkürlerini sunmaktadır.

6. Kaynakça

[1] A. Simonetto, E. Dall'Anese, S. Paternain, G. Leus, and G.B. Giannakis, "Time-varying convex optimization: Time-structured algorithms and applications," *Proceedings of the IEEE*, Vol. 108, No. 11, pp. 2032-2048, 2020.

[2] A.L. Dontchev, M. I. Krastanov, R. T. Rockafellar, and V.M. Veliov, "An Euler–Newton continuation method for tracking solution trajectories of parametric variational inequalities," *SIAM Journal on Control and Optimization,* Vol. 51, No. 3, pp. 1823-1840, 2013.

[3] B. Huang, Y. Zou, Z. Meng, and W. Ren, "Distributed time-varying convex optimization for a class of nonlinear multiagent systems," *IEEE Transactions on Automatic control,* Vol. 65, No. 2, pp. 801-808, 2019.

[4] S. Sun, J. Xu, and W. Ren, "Distributed Continuous-Time Algorithms for Time-Varying Constrained Convex Optimization," *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2022.

[5] A. Simonetto, "Dual prediction-correction methods for linearly constrained time-varying convex programs," *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 64, No. 8, pp. 3355-3361, 2018.

[6] O. Arslan and D. E. Koditschek, "Exact robot navigation using power diagrams,"*IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, pp. 1-8, 2016.

[7] O. Arslan and D. E. Koditschek, "Sensor-based reactive navigation in unknown convex sphere worlds," *The International Journal of Robotics Research,* Vol. 38, No. 2-3, pp. 196-223, 2019.

[8] M. Gendreau, G. Ghiani, and E. Guerriero, "Time-dependent routing problems: A review," *Computers and Operations Research*, Vol. 64, pp. 189-197, 2015.

[9] J. Alonso-Mora, A. Wallar and D. Rus, "Predictive routing for autonomous mobility-on-demand systems with ride-sharing," *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, pp. 3583-3590, 2017.

[10] B. Gutjahr, L. Gröll and M. Werling, "Lateral Vehicle Trajectory Optimization Using Constrained Linear Time-Varying MPC," *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, Vol. 18, No. 6, pp. 1586-1595, 2017.

[11] A. Hauswirth, A. Zanardi, S. Bolognani, F. Dörfler and G. Hug, "Online optimization in closed loop on the power flow manifold," *IEEE Manchester PowerTech*, pp. 1-6, 2017.

[12] Y. Zhao and W. Lu, "Training neural networks with time-varying optimization," *Proceedings of 1993 International Conference on Neural Networks (IJCNN-93-Nagoya, Japan)*, Vol. 2, pp. 1693-1696, 1993.

[13] H.Y. Oksuz, F. Molinari, H. Sprekeler, and J. Raisch, "Federated Learning in Wireless Networks via Over-the-Air Computations," *arXiv preprint*, arXiv:2305.04630, 2023.

[14] X. Cao, J. Zhang and H. V. Poor, "Online Stochastic Optimization With Time-Varying Distributions," *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 66, No. 4, pp. 1840-1847, 2021.

[15] M. J. Feiler and K. S. Narendra, "Simultaneous Identification and Control of Time-Varying Systems," *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 1093-1098, 2006.

[16] M. J. Feiler and K. S. Narendra, "Identification and control using multiple models," *Proceedings of the 14th Yale Workshop on Adaptive and Learning Systems*, 2008.

[17] M. J. Feiler, "On distributed search in an uncertain environment," *IFAC Proceedings Volumes*, Vol. 42, No. 20, pp. 288-292, 2009.

[18] K. S. Narendra, "Hierarchical adaptive control of rapidly time-varying systems using multiple models," *Control of Complex Systems*, pp. 33-66, 2016.