Değişken İlingeli Yönlü Ağlarda Takım Onaylaşımı
Group Consensus in Topology Varying Directed Networks

Ahmet Sakal[1], *Onur Cihan*[2], *Mehmet Akar*[1]

[1]Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Bölümü
Boğaziçi Üniversitesi, İstanbul
ahmet.sakal@boun.edu.tr
mehmet.akar@boun.edu.tr

[2]Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Bölümü
Marmara Üniversitesi, İstanbul
onur.cihan@marmara.edu.tr

Özetçe

Bu çalışmada, çok etmenli ve sabit/değişken ilingeli ağlarda çoklu denge noktalı takım onaylaşımı problemi incelenmiştir. Yönlü çizgelerle modellenen ağlarda ayrık zamanlı dağıtık onaylaşım algoritmasının kararlılığı, birincil ve ikincil katman alt çizge kavramları çerçevesinde ele alınmış, sabit ilingeli ağlar için literatürde yer alan sonuçlar değişken ilingeli ağlar için genişletilerek değişken ilingeli ağlarda takım onaylaşımı için yeterli koşullar elde edilmiştir. Elde edilen sonuçlar sayısal benzetimler ile doğrulanmıştır.

Abstract

In this paper, we study multi-equilibria consensus problem for multi-agent networks under fixed/time-varying topologies. Stability of systems with dynamics in discrete-time on networks modeled with directed graphs is analyzed using concepts of primary and secondary layer subgraphs, and results on networks with fixed topologies are extended to time-varying topologies, thus necessary conditions on group consensus for networks with time-varying topologies are introduced. Results are verified by numerical simulations.

1. Giriş

Son yıllarda çok etmenli dinamik sistemler üzerine önemli ölçüde araştırma yapılmış, ve bu sistemler dağıtık onaylaşım, koordinasyon, senkronizasyon, optimizasyon gibi yaklaşımlarla incelenmiştir. Çok etmenli dinamik sistemler, sistem dinamiklerinin derecesi, sistemin doğrusal/doğrusal olmayan oluşu, sistem dinamiklerinin ayrık/sürekli zamanda ele alınışı, ağın sabit/değişken ilingeli oluşu gibi birçok alt başlık altında analiz edilmiştir [1–6]. Değişken ilingeli ağlarda birinci dereceden dinamiklerle ve yönlü çizgelerle modellenen çok etmenli sistemlerin ayrık ve sürekli zamanlı onaylaşım algoritmalarının kararlılık ve yakınsama analizleri çizge kuramsal çıkarımlarla çalışılmış olup bu sistemlerin onaylaşıma ulaşması için sistemin evrildiği ilingelerin birleşiminin belirli zaman aralıklarında yeteri sıklıtka bir kapsayan ağaca sahip olması gerektiği kanıtlanmıştır [3]. [5]'te doğrusal ve doğrusal olmayan Lipschitz sistemler için sistemlerin bağlaşık oldukları varsayımı altında sistemdeki etmenlerin senkronizasyonu için koşullar belirlenmiştir. Koordinasyon probleminde katsayıların seçimi ve kararsız moda sahip ilingeler arasında anahtarlanan sistemlerin katsayılarının girdi ile kontrolü ve sistemin kararlı hale getirilmesi [6]'da incelenmiştir. Çok etmenli ve sabit/değişken ilingeli ağlarda çoklu denge noktalı onaylaşım ise nispeten üzerine daha az çalışma yapılmış bir alan olmanın yanı sıra birtakım kısıtlayıcı varsayımlar altında incelenmiştir. Bu konuda incelenen ağın ilingesinin önceden bilinmesine gerek duymadan kararlı durumda ağda kaç farklı takım oluşacağı ve bu kararlı durum denge noktalarının ne şartlar altında ve nasıl yöntemlerle bulunabileceği [1]'de detaylı şekilde çalışılmış ve bu konu üzerine yeterli ve gerekli koşullar konmuştur. Ayrıca bu çalışmalar, [2]'de gecikmeli sistemler için genişletilerek verilmiş ve sistemin aynı sayıda denge noktasında onaylaşıma ulaşabilmesi için zaman gecikmesi üzerine ikinci dereceden dinamiğe sahip sistemler için bir sınır konulurken birinci dereceden dinamiğe sistemler için gecikmenin takım sayısına etkisi olmadığı gösterilmiştir.

Bu çalışmada yönlü çizgelerle modellenen ağlarda ayrık zamanlı dağıtık onaylaşım algoritmasının kararlılığı, birincil ve ikincil katman alt çizge kavramları çerçevesinde incelenmiş ve ağ ilingesi üzerindeki şartlar çalışılmıştır. Ağ ilingesi üzerine konulan şartlar ile birlikte [1]'de ortaya konulan sonuçlar, değişken ilingeli ağlar için genişletilmiştir.

Bu çalışmanın geri kalan kısmı şu şekilde organize edilmiştir. İkinci bölümde çok etmenli sistemlerin gösteriminde kullanılan çizge kuramı hakkında bilgi verilmiş ve çizge kuramı kullanlarak ayrık zamanda dağıtık onaylaşım algoritması modellenmiştir. Son olarak takım onaylaşımı problemi tanımlanmıştır. Üçüncü bölümde ayrık zamanda çoklu denge noktalı takım onaylaşımı, sabit ve değişken ilingeli ağlarda analiz edilmiş ve kuramsal sonuçlar paylaşılmıştır. Dördüncü bölümde ileri sürülen kuramsal çalışmayı destekleyici sayısal benzetim sonuçları sunulmuştur. Son bölümde ise kuramsal sonuçlar ve sayısal benzetim sonuçları değerlendirilerek karşılaştırılmıştır.

2. Matematiksel formülasyon

Bu bölümde çok etmenli sistemlerin dağıtık onaylaşım algortimasının ayrık zaman analizi için kullanılacak matematiksel altyapıya yer verilmiş, sabit ilingeli ve ilingesi değişen ağlar için çoklu denge noktalı takım onaylaşım probleminin tanımı yapılmıştır.

2.1. Çizge kuramı

Çok etmenli bir ağ, $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ yönlü çizgesiyle ifade ediliyor olsun. Ağda bulunan etmenler, çizgenin köşe kümesi olan $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ kümesi, etmenler arası iletişim ise çizgenin kenar kümesi olan $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{V}$ x $\mathcal{V}$ kümesi ile temsil edilir. Ağdaki etmenlerin indisleri $\mathcal{I} = \{1, 2, \cdots, n\}$ sonlu kümesinden değer alır. v_j etmeni v_i etmeninden bilgi alıyorsa bu kenar $e_{ij} = (v_i, v_j)$ ile ifade edilir ve çizge üzerinde i köşesinden j köşesine yönlendirilmiş bir ok ile gösterilir.

v_i etmeni için komşuluk kümesi $\mathcal{N}_i = \{v_j : (v_j, v_i) \in \mathcal{E}\}$ şeklinde tanımlanır.

Ağın ilingesi değişken ise ağ, $\mathcal{G}(k) = (\mathcal{V}(k), \mathcal{E}(k))$ dinamik çizgesiyle tanımlanabilir. Burada $\mathcal{V}(k)$ ve $\mathcal{E}(k)$, sırasıyla çizgenin k. adımdaki köşe ve kenar kümelerini ifade eder.

Bir yönlü çizge üzerinde bir veya daha fazla köşeden ve kenardan oluşan rotaya *yol* adı verilir. Bir köşeden başlayıp tekrar aynı köşede biten bir yol bulunuyorsa bu yola *döngü* denir. Bir çizgede her bir köşeden diğer tüm köşelere giden bir yol bulunuyorsa bu çizge için *bağlı çizge* denir. Eğer bir çizge bağlı çizgeyse ve döngü içermiyorsa bu çizgeye *ağaç* adı verilir. Ağacın başlangıç köşesi *kök* olarak isimlendirilir.

Tanım 1. *(Alt çizge)* ([1], Tanım 2) $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ ve $\mathcal{G}_{\text{aç}} = (\mathcal{V}_{\text{aç}}, \mathcal{E}_{\text{aç}})$ çizgeleri verilmiş olsun. Eğer $\mathcal{V}_{\text{aç}} \subseteq \mathcal{V}$ ve $\mathcal{E}_{\text{aç}} \subseteq \mathcal{E} \cap (\mathcal{V}_{\text{aç}} \times \mathcal{V}_{\text{aç}})$ koşulları sağlanıyorsa, $\mathcal{G}_{\text{aç}}$ çizgesi $\mathcal{G}$ çizgesinin bir alt çizgesidir denir.

Bir çizgenin kendisiyle aynı köşe kümesine sahip olan alt çizgesine *kapsayan çizge* denir. Bir çizgenin hem kapsayan alt çizge olan hem de ağaç olan alt çizgesine *kapsayan ağaç* adı verilir. Eğer $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ yönlü çizgesinde diğer köşelerden bilgi almayan en az bir köşe varsa ve çizgenin diğer tüm köşelerine bu köşeden giden bir yol bulunuyorsa, $\mathcal{G}$ çizgesinde bir kapsayan ağaç bulunur.

2.2. Ayrık zamanda dağıtık onaylaşım algortiması modeli

$\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ yönlü çizgesiyle temsil edilen, n etmenden oluşan bir ağda i. etmenin k. adımdaki durum değişkeni $x_i(k) \in \mathbb{R}$ ile ifade edilsin. Ağdaki etmenler, her adımda durum değişkenlerini kendi bilgileri ve komşularından aldıkları bilgeri kullanarak güncellerler. Öyleyse, ağdaki her bir etmenin dinamiği, aşağıda verilen ayrık zamandaki algoritma ile tanımlanabilir.

$$x_i(k+1) = w_{ii}x_i(k) + \sum_{v_j \in \mathcal{N}_i(t)} w_{ij}x_j(k), \; i \in \mathcal{I} \tag{1}$$

Burada $w_{ij}(k)$, k. adımda i. etmenin j. etmenden aldığı bilgiyle ilişkili ağırlıklandırma katsayısıdır ve bu ağırlıklandırma katsayıları aşağıdaki koşulları sağlarlar.

Varsayım 1.

i Her $i \in \mathcal{I}$ için $w_{ii} > 0$ dır.

ii Her $i, j \in \mathcal{I}$ ve $i \neq j$ için eğer $(v_j, v_i) \in \mathcal{E}$ ise $w_{ij} > 0$ dır. Aksi halde $(v_j, v_i) \notin \mathcal{E}$ ise $w_{ij} = 0$ dır.

iii Her $i \in \mathcal{I}$ için $\sum_{j=1}^{n} w_{ij} = 1$ dir.

Varsayım 1(i), her etmenin durum değişkenini güncellerken kendi bilgisini kullanması gerektiğini; Varsayım 1(ii), iki etmen arasında bir iletişim mevcutsa etmenlerin durum değişkenlerini güncellerken komşularından aldıkları bilgileri pozitif katsayılarla kulanması gerektiğini ve aralarında iletişim bulunmayan etmenlerin birbirlerinin bilgilerini kullanamayacaklarını; Varsayım 1(iii) ise her etmenle ilişkili ağırlıklandırma katsayılarının toplamınını 1 olması gerektiğini ifade eder. Varsayım 1(iii), ayrık zamanda ifade edilen onaylaşım algoritmasının kararlılığı için gereklidir.
Denklem 1, matris formunda aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$x(k+1) = Wx(k) \tag{2}$$

Burada $x(k) = [x_1(k), \ldots, x_n(k)]^T \in \mathbb{R}^n$ şeklinde tanımlanmış durum vektörü ve $W = [w_{ij}]$ katsayılar matrisidir.

Literatürde bulunan çoğu çalışma, incelenen ağın sabit ilingeli olduğu kabulüne sahiptir. Oysaki çok etmenli sistemler, etmenlerin haberleştiği kanalın ideal olmaması, bozucu etkenlerin varlığı gibi sebeplerle etmenler arasında yeni iletişim bağlantıları oluşturacak, mevcut iletişim bağlantıların kopmasına sebep olacak veya mevcut iletişim bağlantılarının ağırlık katsayılarının değişmesine neden olacak biçimlerde zaman içerisinde değişen bir yapıya sahip olabilirler. Bu durumda ağ dinamikleri şu şekilde ifade edilebilir:

$$x(k+1) = W(k)x(k) \tag{3}$$

2.3. Takım onaylaşımı problemi

Tanım 2. *(Takım onaylaşımı)*([1], Tanım 1) Dinamikleri denklem (1) ile verilen ve $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ yönlü çizgesiyle temsil edilen n etmenli bir ağı ele alalım. Eğer K farklı c_l sabiti ve K tane boş olmayan S_l kümesi varsa ve öyle ki

$$\text{her } l, m = 1, \ldots, K \text{ ve } l \neq m \text{ için } \bigcup_{l=1}^{K} S_l = \mathcal{V},\; S_l \cap S_m = \emptyset,$$

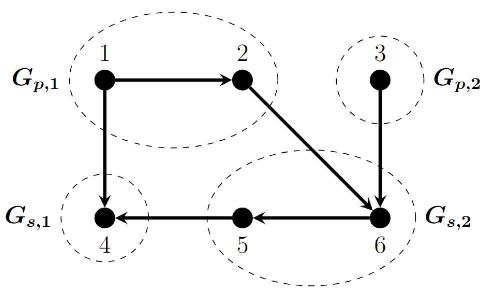
durumu sağlanıyorsa ayrıca herhangi bir başlangıç koşulu $x_0 = [x_1(0), \ldots, x_n(0)]^T \in \mathbb{R}^n$ ve Varsayım 1'i sağlayan herhangi bir W matrisi için $\lim_{k\to\infty} x_i(k) = c_l$, $\forall v_i \in S_l$ durumu sağlanıyorsa verilen ağ K denge noktasına yakınsar ve K-takım onaylaşımına ulaşır.

Tanım 3. ([1], Tanım 3) Sabit ilingeli, n etmenden oluşan $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ yönlü çizgesini ele alalım. $\mathcal{V}$ kümesinin öyle l_p ($l_p \geq 1$) tane alt kümesi vardır ki $\mathcal{V}_{p,i}$ ($i = 1, \ldots, l_p$) ile gösterilen bu alt kümelerin her biri, kendileriyle ilintili alt çizge $\mathcal{G}_{p,i}$'nin kapsayan ağaç içeren mümkün olan en geniş alt kümesidir ve her $v_a \in \mathcal{V}_{p,i}$ ve $v_b \notin \mathcal{V}_{p,i}$ için $(v_b, v_a) \notin \mathcal{E}$ dir. Bu durumda her $i = 1, \ldots, l_p$ için $\mathcal{G}_{p,i}$, $\mathcal{G}$ çizgesinin bir birincil katman alt çizgesidir denir.

Tanım 4. ([1], Tanım 4) $\overline{\mathcal{V}}$ kümesini, birincil katman alt çizgelerde bulunmayan köşeler kümesi olarak tanımlayalım yani $\overline{\mathcal{V}} = \mathcal{V} \setminus \bigcup_{i=1}^{l_p} \mathcal{V}_{p,i}$. $\overline{\mathcal{V}}$ kümesinin öyle l_s tane alt kümesi vardır ki $\mathcal{V}_{s,i}$ $(i = 1, \ldots, l_s)$ ile gösterilen bu alt kümelerin her biri, kendileriyle ilintili alt çizge $\mathcal{G}_{p,i}$'nin kapsayan ağaç içeren bir alt kümesidir ve bu alt kümelerin her biri için öyle bir $v_a \in V_{s,i}$ vardır ki bu köşe tektir ve aşağıdaki koşulları sağlar

- i Her $v_b \in \mathcal{V}_{s,i} \setminus v_a$ ve $v_c \in \mathcal{V} \setminus \mathcal{V}_{s,i}$ için $(v_c, v_b) \notin \mathcal{E}$ dir.
- ii En az iki farklı birincil veya ikincil katman alt çizgeden en az iki köşe (v_d ve v_e) bulunabilir öyle ki $(v_d, v_a) \in \mathcal{E}$ ve $(v_e, v_a) \in \mathcal{E}$ dir.
- iii $\mathcal{V}_{s,i}$'nin kapsayıcı ağacının kökü v_a köşesidir.

Bu durumda her $i = 1, \ldots, l_s$ için $\mathcal{G}_{s,i}$, $\mathcal{G}$ çizgesinin bir ikincil katman alt çizgesidir denir.



Şekil 1: 6 etmenden oluşan örnek bir ağ.

Örnek 1. Şekil 1'de verilen çizgeyi ele alalım. v_1 ve v_2 köşeleri birlikte $\mathcal{G}_{p_1}$ birincil katman alt çizgesini oluşturmaktadır. Eğer v_4 köşelesi bu alt çizgeye dahil edilmek istenirse $v_4 \in \mathcal{V}_{p,1}$ ve $v_5 \notin \mathcal{V}_{p,1}$ için $(v_5, v_4) \in \mathcal{E}$ olduğundan v_4 köşesinin eklenmesiyle oluşan alt çizge tanım 3'e uymaz. Benzer yöntem ile v_6 köşesinin de tanım dışında kaldığı görülebilir. Dolayısıyla kapsayan ağaç içeren mümkün olan en geniş alt küme v_1 ve v_2 köşelerinden oluşur. v_3 köşesinin bir başına olduğu görülebilir, ancak Varsayım 1(i) dolayısıyla her köşe bir düğüm oluşturur öyleyse v_3 kendi başına $\mathcal{G}_{p_2}$ için kapsayan ağaçtır.

3. Ayrık zamanda çoklu denge noktalı takım onaylaşımı analizi

Bu bölümde ilk kısımda sabit ilingeli ağ yapısında takım onaylaşımı durumunda çoklu denge durumu analiz edilmiş, ikinci kısımda ise ağ ilingesinin değişken olduğu durum için sonuçlar genişletilmiştir.

3.1. Sabit ilingeli ağlar

Sabit ilingeli bir ağ için denklem (2) ile ifade edilen dinamik sistemin kararlılık analizi W matrisinin özdeğerleri analiz edilerek gerçekleştirilebilir.

Verilen dinamik sistemin çözümü, $x(k) = W^k x(0)$ ile elde edilir. Bu durumda, dinamik sistemin kararlılığı $\lim_{k\to\infty} W^k x(0)$ limitinin varlığına, eğer limit varsa kararlı durumda ağın durumu ve onaylaşım yapısı ise limitin yapısına bağlıdır.

Önsav 1. ([1], Önsav 4) W matrisi Varsayım 1'i sağlayan bir satır-stokastik matris olsun. Öyleyse $\lim_{k\to\infty} W^k$ vardır.

Yorum 1. Eğer ağ ile ilişkili katsayılar matrisi W Varsayım 1'i sağlıyorsa W, negatif olmayan stokastik bir matristir. Stokastik matrislerin birim çember üzerinde bulunan özdeğerleri birim özdeğer olarak adlandırılır ve bir stokastik matrisin bütün özdeğerleri büyüklük olarak birim özdeğerden küçük ya da ona eşittir. Ayrıca bir stokastik matrisin birim özdeğerinin geometrik katlılığı ile cebirsel katlılığı birbirine eşittir.

Önsav 2. ([1], Kuram 1) Sabit ilingeli, n etmenden oluşan $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ yönlü çizgesiyle temsil edilen bir ağ, kararlı durumda $K = l_p + l_s$ denge noktasına yakınsar ve K-takım onaylaşımına ulaşır. Burada l_p ve l_s sırasıyla birincil ve ikincil katman alt çizgelerin sayısıdır.

3.2. Değişken ilingeli ağlar

Önsav 2'de verilen sonucun dinamikleri denklem 3 ile ifade edilen bir sisteme genişletilebilmesi için indirgenmiş çizge tanımı gereklidir.

Tanım 5. *(İndirgenmiş çizge) $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$, l_p tane birincil katman alt çizge, l_s tane ikincil katman alt çizgeden oluşan bir yönlü çizge olsun. $\mathcal{G}_i = (\mathcal{V}_i, \mathcal{E}_i)$, $i = 1, \ldots, l_p$ için $\mathcal{G}$ çizgesinin birincil katman alt çizgelerini ve $i = l_p + 1, \ldots, l_s$ için $\mathcal{G}$ çizgesinin ikincil katman alt çizgelerini ifade ediyor olsun. $\mathcal{G}$ çizgesiyle ilişkili katsayı matrisi W ile gösterilsin. $\overline{\mathcal{V}} = \{\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_{l_p+l_s}\}$ kümesi ve bu küme üzerinde aşağıdaki şekilde tanımlanan kenar kümesi ele alınırsa*

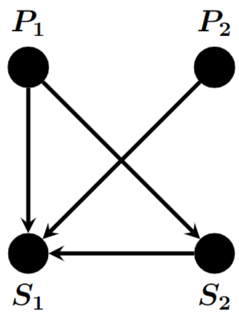
$$(\overline{v}_i, \overline{v}_j) \begin{cases} \in \overline{\mathcal{E}} & \exists a \in \mathcal{V}_i,\ b \in \mathcal{V}_j \text{ öyle ki } (a, b) \in \mathcal{E} \\ \notin \overline{\mathcal{E}} & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \tag{4}$$

$\mathcal{G}$ çizgesinin indirgenmiş çizgesi $\overline{\mathcal{G}} = (\overline{\mathcal{V}}, \overline{\mathcal{E}})$ şeklinde tanımlanır. Bu durumda $\overline{\mathcal{G}}$ ile ilişkili katsayı matrisi $\overline{W} = [\overline{w}_{ij}]$'nun elemanları şu şekilde tanımlanır:

$$\overline{w}_{ij} = \begin{cases} \sum_{k\in\mathcal{V}_i} \sum_{l\in\mathcal{V}_j} w_{kl},\ i \neq j \text{ ise} \\ \\ 1 - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{l_p+l_s} \overline{w}_{ij},\ i = j \text{ ise} \end{cases} \tag{5}$$

Örnek 2. Şekil 1'de verilen çizgeyi tekrar ele alalım. $\mathcal{G}$ çizgesinin indirgenmiş çizgesi $\overline{\mathcal{G}}$ Şekil 2'de verilmiştir. Şekilden de görüldüğü gibi indirgenmiş çizgede bulunan köşe sayısı, $\mathcal{G}$ çizgesindeki birincil ve ikincil katman alt çizge sayılarının toplamına eşittir.

Değişken ilingeli ağlar incelenirken iki durum ortaya çıkar. Ağ içerisinde etmenler arasında yeni iletişim bağlantıları oluşturacak veya mevcut iletişim bağlantıların kopmasına sebep olacak durumda doğrudan her zaman adımında ilingesel yapı değişir. Ancak ağ içerisinde iletişim bağlantılarının kopması ya da yeni bağlantıların oluşmasının söz konusu olmadığı durumda ilingesel yapı bütün zaman adımları için korunabilir. Bu durumda, katsayılar matrisinin her zaman adımı için değişip değişmezliği önemlidir. Sabit ilingeli bir sistemden ayırt etmek için ilingesel yapının sabit kaldığı ancak katsayıların değiştiği durum bu başlık altında incelenmiştir. Bu başlıklarda ilgili durumlar için yeterli koşullar Kuram 1 ve 2'de verilmiştir.



Şekil 2: Şekil 1'de verilen çizgenin indirgenmiş çizgesi.

3.2.1. Sadece katsayıların değiştiği ağlar

Bu kısımda verilen ağ yapısının zamanla değiştiği, ancak ağ içerisinde yeni bağlantıların kurulmadığı veya var olan bağlantıların eksilmediği varsayılmıştır.

Kuram 1. *Dinamikleri denklem (3) ile verilen ve $\mathcal{G}(k) = (V(k), \mathcal{E}(k))$ yönlü çizgesiyle temsil edilen n etmenli bir ağı ele alalım.*
Eğer $i = 1, 2, \ldots$ için denklem (6)'de tanımlanan her W_i matrisinin kendisiyle ilintili çizgenin indirgenmiş çizgesinin aynı indirgenmiş katsayılar matrisine sahip olması koşulunu sağlayabilecek $k_0 > 0$ ve $l_i > 0$ skalerleri her $i = 1, 2, \ldots$ için bulunabiliyorsa verilen ağ $K = l_p + l_s$ denge noktasına yakınsar ve K-takım onaylaşımına ulaşır.

$$W_i = W(k_0 + \sum_{j=1}^{i-1}(l_j + l_i - 1)) \cdots W(k_0 + \sum_{j=1}^{i-1} l_j) \quad (6)$$

3.2.2. İlingesel yapının değiştiği ağlar

Kuram 2. *Dinamikleri denklem (3) ile verilen ve $\mathcal{G}(k) = (V(k), \mathcal{E}(k))$ yönlü çizgesiyle temsil edilen n etmenli bir ağı ele alalım.*
Eğer $i = 1, 2, \ldots$ için denklem (7)'de tanımlanan her W_i matrisinin;

- *i kendisiyle ilintili çizgenin indirgenmiş çizgesinin aynı indirgenmiş katsayılar matrisine sahip olması ve aynı zamanda*
- *ii kendisiyle ilintili çizgenin indirgenmiş çizgesinin birincil ve ikincil katman alt çizgeler bakımından aynı şekilde bölüntülenebilmesi*

koşullarını sağlayabilecek $k_0 > 0$ ve $l_i > 0$ skalerleri her $i = 1, 2, \ldots$ için bulunabiliyorsa verilen ağ $K = l_p + l_s$ denge noktasına yakınsar ve K-takım onaylaşımına ulaşır.

$$W_i = W(k_0 + \sum_{j=1}^{i-1}(l_j + l_i - 1)) \cdots W(k_0 + \sum_{j=1}^{i-1} l_j) \quad (7)$$

4. Sayısal benzetim

Aşağıda verilen W ve X katsayılar matrisini ele alalım. Bu iki katsayılar matrisi için farklı senaryolarda yapılan benzetim sonuçları Şekil 3-8'da verilmiştir. Benzetimlerde başlangıç koşulları $x_0 = [0.8, 0.3, 0.2, 0.06, 0.42, 0.70]^T$ olarak seçilmiştir.

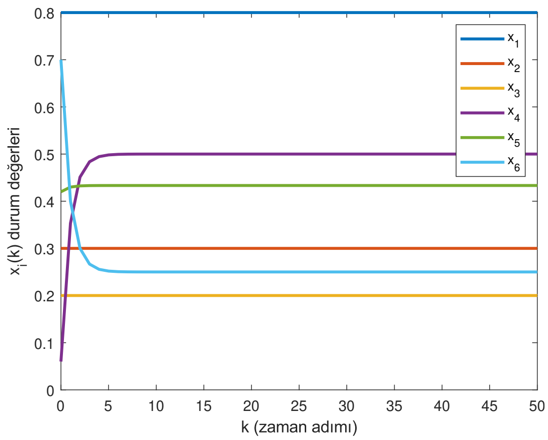
$$W = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{4}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{15} & \frac{4}{15} & \frac{4}{15} & 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{2}{5} & 0 & \frac{2}{5} & 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

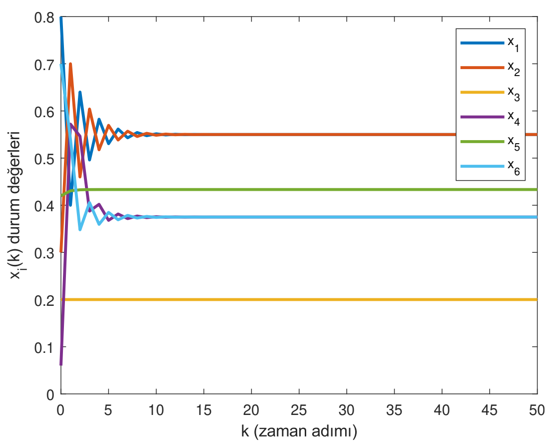
Sabit ilingeli bir ağda katsayılar matrisi olarak W ve X matrisleri seçildiği durumda benzetim sonuçları Şekil 3 ve Şekil 4'te verilmiştir. Şekillerden de görüleceği üzere ağın katsayılar matrisinin W matrisi olması durumunda sistem 6 denge noktalı onaylaşıma ulaşır. Öte yandan ağın katsayılar matrisi X matrisi seçilirse sistem 4 denge noktasına yakınsar.

Şekil 5'te sonuçları verilen benzetimde W ve X matrisleri periyodik olarak anahtarlanmış, her adımda katsayılar matrisi bu iki matris arasında değiştirilmiştir. Bu durumda her $i = 1, 2, \ldots$ için $l_i = 2$ seçilirse, k_0'dan bağımsız olarak bütün W_i matrisleri aynı yapıda olacaklardır. Dolayısıyla Kuram 2'de ortaya konulan şartlar sağlanır ve benzetim sonuçlarından da görüleceği üzere sistem 4 denge noktasına yakınsar. Şekil 6'da benzer şekilde sonuçlar bu defa W matrisinin 2 adım boyunca geçerli olduğu, daha sonra anahtarlama yapılarak X matrisinin kullanıldığı ve bu anahtarlamanın periyodik yapıldığı durum için elde edilmiştir.

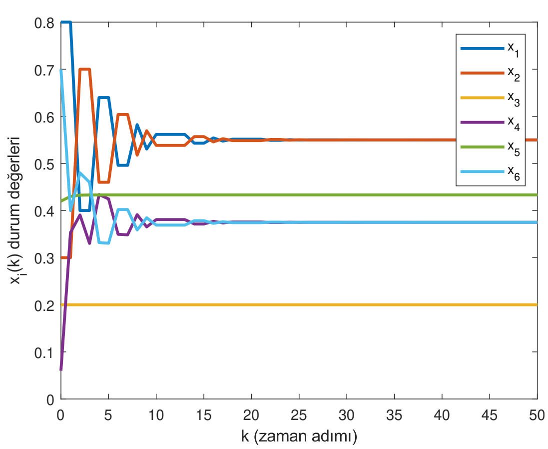
Şekil 8'de X matrisi her 10 zaman adımında bir defa anahtarlanarak kullanılmış, ancak hangi adımda anahtarlanacağı tamamen rastgele belirlenmiştir. Bu durumda her $i = 1, 2, \ldots$ için $l_i = 10$ seçilirse W_i matrisleri W matrisinin 9 defa, X matrisinin ise 1 defa çarpımından oluşur. W ve X matrisleri değişme özelliğine sahip matrisler olduklarından bu çarpımın sonucu, X matrisinin anahtarlandığı rastgele zaman adımına göre değişmeyeceğinden Kuram 2'de ortaya konulan şartlar sağlanır ve sistem 4 denge noktasına yakınsar. Şekil 7'de W ve X matrisleri her adımda belirli sabit olasılıklara göre seçilmiştir. Benzer yaklaşımla sırası önemli olmaksızın öyle l_i skalerleri seçilebilir ki zaman adımları bu sabitlere göre bölüntülendiğinde bu matrislerin anahtarlanma sayıları her bölüntü için aynı olur. Dolayısıyla sistem 4 denge noktasına yakınsar.



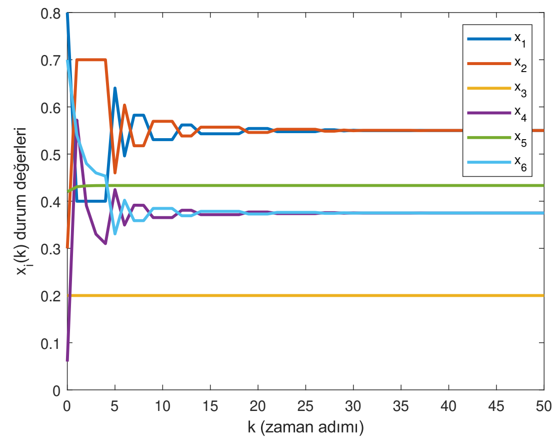
Şekil 3: Ağın W katsayılar matrisi ile benzetimi.



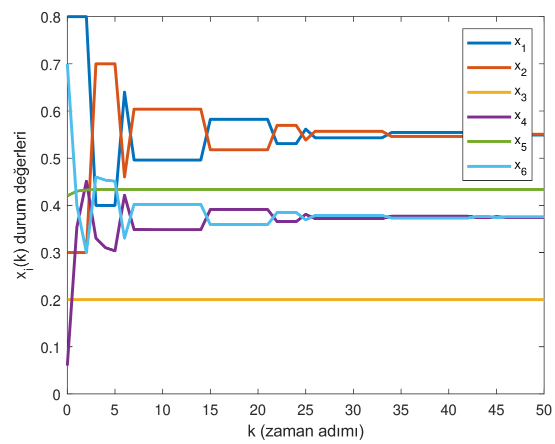
Şekil 4: Ağın X katsayılar matrisi ile benzetimi.



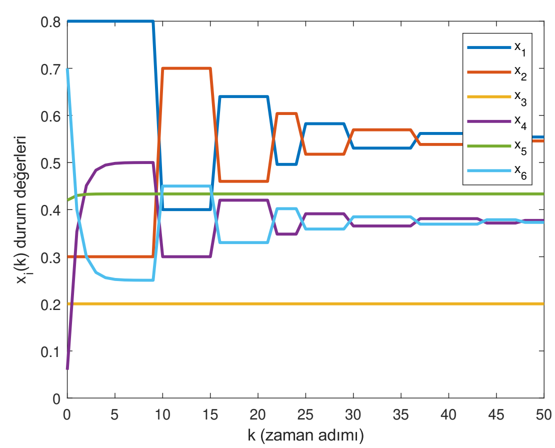
Şekil 5: $K = 2$ periyoduyla X ve W matrisi arasında anahtarlama durumu.



Şekil 6: $K = 3$ periyoduyla X matrisinin anahtarlanması durumu.



Şekil 7: 0.7 olasılıkla W matrisinin, 0.3 olasılıkla X matrisinin anahtarlanması durumu.



Şekil 8: X matrisinin her 10 zaman adımında yalnızca bir defa olacak şekilde rastgele anahtarlanması durumu.

5. Sonuçlar

Bu çalışmada, yönlü çizgelerle modellenen çok etmenli ağlarda dağıtık onaylaşım sorunu incelenmiştir. İncelenen sistem, ayrık zamanlı birinci dereceden dinamiklerle modellenmiş, literatürde mevcut olan [3, 4] sonuçlar, [1]'de literatüre kazandırılan birincil ve ikincil katman alt çizge kavramları kullanılarak çalışılmış ve yeterli koşullar belirlenmiştir. Elde edilen kuramsal sonuçlar sayısal benzetimler ile doğrulanmıştır.

6. Kaynakça

[1] O. F. Erkan, O. Cihan, and M. Akar, "Analysis of distributed consensus protocols with multi-equilibria under time-delays," *Journal of the Franklin Institute*, vol. 355, no. 1, pp. 332–360, 2018.

[2] U. Develer and M. Akar, "Cluster consensus in first and second-order continuous-time networks with input and communication delays," *International Journal of Control*, vol. 94, no. 4, pp. 961–976, 2019.

[3] W. Ren and R.W. Beard, "Consensus seeking in multi-agent systems under dynamically changing interaction topologies," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 50, no. 5, pp. 655–661, 2005.

[4] R. Olfati-Saber, J. A. Fax, and R. M. Murray, "Consensus and cooperation in networked multi-agent systems," *Proceedings of the IEEE*, vol. 95, no. 1, pp. 215–233, 2007.

[5] J. Qin, Q. Ma, X. Yu, and L. Wang, "On synchronization of dynamical systems over directed switching topologies: An algebraic and geometric perspective," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 65, no. 12, pp. 5083–5098, 2020.

[6] J. Liu and J. Huang, "Discrete-time leader-following consensus over switching digraphs with general system modes," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 66, no. 3, pp. 1238–1245, 2021.