

# Doğrusal port-Hamiltonyen Sistemlerin Optimal Kontrolü

## Optimal Control of Linear port-Hamiltonian Systems

Gökçen Devlet Şen<sup>1</sup>, Gülay Öke Günel<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Kontrol ve Otomasyon Mühendisliği Bölümü  
İstanbul Teknik Üniversitesi, İstanbul  
{gokcen.sen, gulay.oke}@itu.edu.tr

### Özetçe

Bu çalışmada, doğrusal port-Hamiltonyen sistemlerin optimal kontrolü ele alınmıştır. Öncelikle optimal kontrol probleminin maliyet fonksiyonu, tedarik edilen enerjiyi minimize edecek şekilde seçilmiştir. Ancak bu maliyet fonksiyonu tekil bir optimal kontrol probleminin oluşmasına yol açmaktadır. Bu problemin çözümüne ilişkin literatürdeki analizler bu çalışmada ele alınmış ve bu probleme eşdeğer bir optimal kontrol problemi oluşturacak yeni bir maliyet fonksiyonu önerilmiştir. Bu iki farklı maliyet fonksiyonu minimum enerjiyle durum geçiş optimal kontrol probleminin tasarımında kullanılmış ve ayrılaştırılarak kıyaslanmıştır. Bunun sonucunda optimal kontrol problemlerinde ayrılaştırmanın iki eşdeğer problem için farklı sonuçların elde edilmesine yol açabileceği görülmüştür. Daha sonra bu önerilen maliyet fonksiyonuyla ve karesel kontrol terimini içeren maliyet fonksiyonuyla oluşturulan optimal kontrol problemleri, enerji tüketimi açısından karşılaştırılmıştır ve önerilen maliyet fonksiyonunun enerji tüketimi açısından çok daha verimli çalıştığı görülmüştür. Son olarak bu maliyet fonksiyonları yörünge takibi probleminde ve model öngörülü kontrolör şeması içinde kullanılıp, yine enerji tüketimi açısından karşılaştırılmıştır.

### Abstract

In this paper, optimal control of linear port-Hamiltonian systems has been considered. Initially, the cost functional of the optimal control problem is chosen to minimize the supplied energy. However, this cost functional leads to a singular optimal control problem. The analyses in the literature regarding the solution of this problem are discussed in this work, and a new cost functional is proposed to form an equivalent optimal control problem. These two different cost functionals are used in the design of the optimal control problem for a state transition with minimal energy supply and compared after discretization. As a result, it is observed that discretization in optimal control problems can yield different outcomes for two equivalent problems. Subsequently, the optimal control problem formulated with the proposed cost functional and the cost functional incorporating the quadratic control term are compared in terms of energy consumption, revealing that the proposed cost functional operates

much more efficiently in terms of energy consumption. Finally, these cost functionals are used in the trajectory tracking problem and within the model predictive control scheme, and they are compared once again in terms of energy consumption.

### 1. Giriş

Son zamanlarda, port-Hamiltonyen (pH) yapısı, fiziksel sistemlerin modelleme, analiz ve kontrolünde büyük bir etkiye sahip olmuştur [1, 2]. pH yapısı, enerji tabanlı bir modelleme yaklaşımı sunar ve aslında sistem dinamiklerini enerji fonksiyonlarıyla tanımlayan Hamiltonyen yapısının, giriş ve çıkış kapılarıyla genişletilmiş bir versiyonudur. Bu enerji tabanlı bakış açısı, sistemin davranışının ve enerji alışverişlerinin daha derin bir anlayışını sağlar, böylece enerji verimli ve kararlı kontrol stratejileri tasarlamayı kolaylaştırır. Ayrıca, pH sistemleri, pasiflik arz oranı (passivity supply rate)  $u^T y$  açısından yayılmacı bir özellik gösterirler, yani pasif sistemlerdir.

Yayıma (Dissipativity) teorisi, özellikle optimal kontrol problemlerinde (OKP) karşımıza çıkan *turnpike* fenomeninin araştırılması konusunda önemli olmuştur [3]. Optimal kontrol problemlerinin çözümünde elde ettiğimiz optimal yörüngeler, bazen belirli bir süre boyunca belirli bir denge durumuna yakın olarak hareket ederler ve daha sonra bu bölgeden ayrılırlar. Optimal yörüngelerin bu hareketine literatürde *turnpike* fenomeni adı verilmiştir [4]. Bu fenomen ilk olarak ekonomi alanında keşfedilse de günümüzde özellikle (ekonomik) model öngörülü kontrol şemalarının performansını ve kararlılığını analiz etmede önemli bir bileşen olmaktadır [5]. Literatürde bu *turnpike* fenomeninin oluşumu genellikle maliyet fonksiyonlarındaki karesel kontrol terimine bağlı olmuştur.

Son zamanlarda, pH sistemlerinin optimal kontrolü büyük ilgi çekmiştir [6, 7]. pH sistemleri yapısı gereği doğal olarak enerji denge denklemini sağlar. pH sistemlerinin optimal kontrolü için maliyet fonksiyonu seçiminde, enerji denge denkleminde bulunan, tedarik edilen enerji teriminin kullanılması, enerji verimli bir sonuç elde etmek için oldukça doğal bir seçim olacaktır. Ancak tedarik edilen enerji terimi doğrusal olarak kontrol ifadesine bağlıdır ve bu nedenle ortaya çıkan optimal kontrol problemi tekil bir problem olmaktadır. Tekil problemler için literatürde var olan Riccati teorisi gibi çözüm yolları kullanılamamaktadır. Bu sorun adi diferansiyel denklemler (ODE) ve cebirsel diferansiyel denklemler (DAE) için analiz edilmiştir ve bu problemin belirli koşullar altında çözümünün varlığı, optimal çözüm için gerek şartlar belirtilmiştir [8, 9]. Yakın zamanda

bu şartlar tamamen genelleştirilerek verilmiştir [10]. Ayrıca, bu sonuçlar yüksek katlı binaların bir uygulamasında kullanılmıştır [11].

Bu bildiride doğrusal pH sistemlerinin optimal kontrolü ele alınmıştır. Bölüm 2’de tedarik edilen enerjiyi minimize edecek optimal kontrol problemi tanımlanmış, bu problem ile ilgili literatürdeki analizler verilmiş ve bu probleme eş değer bir problem oluşturacak yeni bir maliyet fonksiyonu öne sürülmüştür. Bölüm 3’te teoride sürekli zamanda eşdeğer olan bu iki problem, ayrıklaştırılarak birbirine kıyaslanmıştır. Bölüm 4’te önerilen bu maliyet fonksiyonunun enerji verimliliği açısından performansı, literatürde sıklıkla kullanılan karesel kontrol teriminden oluşan maliyet fonksiyonuyla karşılaştırılmıştır. Bölüm 5’te problem yörünge takibi problemi için genişletilerek, model öngörülül kontrolör yapısı içinde ele alınarak, enerji verimliliği açısından performansı karşılaştırılmıştır. Bölüm 6 ile bildiri sonlandırılmıştır.

**Notasyon:** Lebesgue ölçülebilir fonksiyonlar  $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $\mathcal{M}([0, T], \mathbb{R}^m)$  şeklinde gösterilmiştir ve  $\mathcal{M}([0, T], \mathbb{U})$  ifadesi kompakt, konveks ve boş olmayan  $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^m$  kümesinin bir alt kümesidir.  $a \leq b$  şeklindeki iki tamsayı için  $[a : b] := [a, b] \cap \mathbb{Z}$  şeklinde kısaltma kullanılmıştır.

## 2. Minimal enerji tedarikiyle durum geçiş problemi

Ele alınan doğrusal port-Hamiltonyen sistemi,

$$\dot{x}(t) = (J - R)Qx(t) + Bu(t) \quad (1a)$$

$$y(t) = B^\top Qx(t), \quad (1b)$$

burada  $J \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ters simetrik bir matris, diğer bir değişle,  $J = -J^\top$ , simetrik, pozitif yarı kesin yayılma matrisi  $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , simetrik, pozitif kesin matris  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , ve giriş matrisi  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  ile ifade edilmiştir. Sistemin toplam enerjisi, enerji Hamiltonyeni  $H(x) = \frac{1}{2}x^\top Qx$  ile verilir. Enerji Hamiltonyeninin, (1a) ile çözülmesiyle güç denge denklemi (2)’deki gibi elde edilir.

$$\frac{d}{dt}H(x(t)) = u(t)^\top y(t) - \|R^{\frac{1}{2}}Qx(t)\|_2^2. \quad (2)$$

Güç denge denkleminin  $T > 0$  için  $[0, T]$  zaman aralığında integral çözümünü (3)’teki enerji denge denklemi elde edilir.

$$H(x(T)) - H(x(0)) = \underbrace{\int_0^T u(t)^\top y(t) dt}_{\text{tedarik edilen enerji}} - \underbrace{\int_0^T \|R^{\frac{1}{2}}Qx(t)\|_2^2 dt}_{\text{yayılan enerji}}. \quad (3)$$

Buna göre  $x^0 \in \mathbb{R}^n$  başlangıç durumunu bir  $x_T \in \mathbb{R}^n$  son durumuna  $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^m$  kontrol kısıtları altında minimal tedarik enerjisi ile götürebilecek OKP, (4)’teki gibidir.

$$\begin{aligned} \min_{u \in \mathcal{M}([0, T], \mathbb{U})} J^e(x, u) &:= \int_0^T u(t)^\top y(t) dt \\ \text{s.t. (1a), } x(0) &= x^0, \text{ and } x(T) = x_T. \end{aligned} \quad (4)$$

Bu problemde maliyet fonksiyonu, kontrol işaretine doğrusal olarak bağımlıdır. Bu nedenle OKP (4) tekil bir problemdir. Ancak

bu problem [8, 9] yayınlarında çözümün varlığı, optimalliğin gerek koşulları ve turnpike fenomeni ele alınarak analiz edilmiştir. Buna göre  $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^m$  kısıtlarının kompakt ve boş olmayan bir küme olduğu varsayımı altında eğer  $x_T$  son durumu,  $x^0$  başlangıç durumu tarafından erişilebilirse optimal kontrolün varlığı kanıtlanmıştır [8, Proposition 7]. Bu problemin çözümünde elde edilen optimal kontrol  $u_e^* \in \mathcal{M}([0, T]; \mathbb{U})$  ile, buna bağlı elde edilen optimal durumlar ise  $x_e^* = x(\cdot; x^0, u_e^*)$  ile gösterilecektir.

**Optimalliğin Gerek Koşulları ve Tekil Arklar.** Pontryagin’in maksimum ilkesi ele alındığında, (4) probleminin optimal çözümleri  $(x_e^*, u_e^*)$  için, her  $t \in [0, T]$  için,  $(\lambda_0, \lambda) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \times W^{1,1}(0, T; \mathbb{R}^n)$ ,  $(\lambda_0, \lambda(t)) \neq 0$  vardır, öyle ki,

$$\begin{aligned} \dot{x}_e^* &= (J - R)Qx_e^*(t) + Bu_e^*(t) \\ \dot{\lambda}(t) &= -\lambda_0 QBu_e^*(t) + Q(J + R)\lambda(t) \\ u_e^*(t) &\in \arg \min_{\tilde{u} \in \mathbb{U}} \tilde{u}^\top B^\top (\lambda_0 Qx_e^*(t) + \lambda(t)). \end{aligned} \quad (5)$$

Eğer  $i$  anındaki anahtarlama fonksiyonunu  $s_i$  aşağıdaki gibi tanımlarsak

$$s_i(t) := (B^\top (\lambda_0 Qx_e^*(t) + \lambda(t)))_i$$

bu durumda kontrol ifadesi  $s_i(t) > 0$  durumları için  $u_i^* = \underline{u}_i$ ,  $s_i(t) < 0$  durumları için  $u_i^* = \bar{u}_i$  değerlerini alır. Eğer sonlu bir zaman aralığı için  $s_i(t) = 0$  durumu sağlanıyorsa, bu durumda OKP’nin tekil ark (singular arc) sergilediği söylenir. Yine de bu problem [8, Theorem 8] yayınında analiz edilmiştir ve  $\text{im}(B) \cap \ker(RQ) = 0$  koşulu altında, optimal kontrolün tamamen optimal durumlar ve Lagrange çarpanına bağlı olarak elde edilebildiği ispatlanmıştır. [10] yayınında ise bu koşulun gerek değil yeter koşul olduğu belirtilmiştir.

Ayrıca OKP (4) çözümüyle elde edilen optimal durumların  $\ker(RQ)$  alt uzayında *turnpike* özelliği gösterdiği [9, Theorem 4.4] yayınında ispat edilmiştir. Turnpike fenomeni, optimal durumların zamanın çoğunu belli bir denge bölgesinde geçirmelerine verilen isimdir.  $\ker(RQ)$  alt uzayı yayılmacı olmayan (non-dissipative) bir alt uzaydır, diğer bir değişle enerjinin harcanmadığı bir alt uzaydır. Bu nedenle optimal durumlar zamanın çoğunu bu bölgede geçirerek daha az enerji harcanmasını sağlamaktadır. Bu fenomen ile ilgili daha fazla bilgi için [8, 9] yayınları önerilmektedir.

Enerji denge denklemini (3) yeniden ele alırsak, buradaki terimler ile aşağıdaki maliyet fonksiyonunu tanımlayabiliriz.

$$\begin{aligned} J^s(x, u) &:= \int_0^T x(t)^\top Q^\top RQx(t) dt \\ &= J^e(x, u) + \underbrace{H(x^0) - H(x_T)}_{\text{sabit}}. \end{aligned}$$

Görüldüğü üzere  $J^s$  maliyet fonksiyonu aslında  $J^e$  maliyet fonksiyonuyla sabit bir sayının toplamına eşittir. Bu nedenle  $J^s$  maliyet fonksiyonunun kullanılmasıyla elde edilen OKP’nin çözümüyle elde edilen optimal kontrol-optimal durum çifti  $(u_s^*, x_s^*)$ ,  $J^e$  maliyet fonksiyonunun kullanılmasıyla elde edilen optimal çözüme eşit olacaktır, diğer bir değişle  $u_s^* = u_e^*$  ve  $x_s^* = x_e^*$  geçerlidir. Yani  $J^e$  ve  $J^s$  ile oluşturulmuş OKP’ler birbirine eş değerdir. Başka açıdan ele alırsak, minimal tedarik

edilen enerjiyle durum geçişi, minimal yayılan enerjiyle durum geçişine eş değerdir. Bir sonraki bölümde bu iki eşdeğer problemin ayrıklaştırılması sonucunda elde edilen sonuçlar incelenecektir.

### 3. Optimal kontrol problemlerinin ayrıklaştırılması

$J^s$  ve  $J^e$  maliyet fonksiyonlarıyla kurulan OKP'lerin eş değeri sürekli zamanda gösterilmiştir. Ancak bu durum ayrıklaştırılmış problemler için sağlanmayabilir. Bunun nedeni, enerji denge denkleminin ayrıklaştırıldığında korunamama ihtimalinin olmasıdır. Bu bölümde (6)'da verilen farklı örnekleme zamanlarını kullanarak bu problemi nümerik olarak ele alacağız.

$$\Delta t \in \{10^{-1}, 5 \cdot 10^{-2}, 10^{-2}, 5 \cdot 10^{-3}, 10^{-3}, 5 \cdot 10^{-4}\}. \quad (6)$$

**Ayrıklaştırma:** Örnekleme zamanı  $t_k := k\Delta t$ ,  $k \in [0 : N]$ ,  $N = T/\Delta t + 1$  için, ayrık durum, kontrol ve çıkış sırasıyla  $x_k = x(t_k)$ ,  $u_k = u(t_k)$ , ve  $y_k = y(t_k)$  ile gösterilmiştir. Enerji denge denkleminin korunması için önerilen ayrıklaştırma şemaları [12, 13] yayınlarında işlenmiştir. Burada sistem dinamiklerinin doğrusal olması sebebiyle (1a) sistemi orta nokta metodu (implicit midpoint rule) ile (7)'deki gibi ayrıklaştırılmıştır.

$$x_{k+1} = x_k + \Delta t f((x_k + x_{k+1})/2, u_k) \quad (7a)$$

$$y_{k+1} = B^T Q x_{k+1}, \quad (7b)$$

Burada her  $k \in [0 : N - 1]$  için  $f(x, u) := (J - R)Qx + Bu$ . Doğrusallıktan dolayı (7) denklemini aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\left(I - \frac{\Delta t}{2}(J - R)Q\right) x_{k+1} = \left(I + \frac{\Delta t}{2}(J - R)Q\right) x_k + \Delta t B u_k.$$

Burada  $(J - R)Q$  sadece pozitif olmayan reel özdeğerlere sahip olduğu için, sol kısımdaki matris tersi alınabilir. Buna göre,

$$x_{k+1} = \left(I - \frac{\Delta t}{2}(J - R)Q\right)^{-1} \left(\left(I + \frac{\Delta t}{2}(J - R)Q\right) x_k + \Delta t B u_k\right).$$

Buna bağlı olarak, OKP'ler de sol Riemann toplamı ile ayrıklaştırılmıştır. OKP (4), (8)'deki gibi ayrıklaştırılmıştır.

$$\min_{u=(u_k)_{k=0}^{N-1} \in \mathbb{U}^N} \tilde{J}^e(x, u) := \Delta t \sum_{k=0}^{N-1} u_k^T y_k, \quad (8)$$

s.t. (7a),  $x(0) = x^0$ , and  $x_N = x_T$ .

Aynı şekilde  $J^s$  maliyet fonksiyonuna bağlı ayrık OKP, (9)'daki gibidir.

$$\min_{u=(u_k)_{k=0}^{N-1} \in \mathbb{U}^N} \tilde{J}^s(x, u) := \Delta t \sum_{k=0}^{N-1} x_k^T Q^T R Q x_k, \quad (9)$$

s.t. (7a),  $x(0) = x^0$ , and  $x_N = x_T$ .

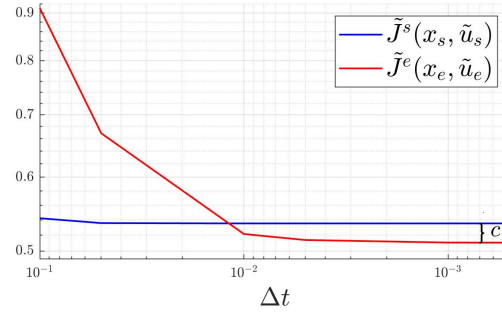
Bu iki ayrık OKP aşağıdaki üç durumlu tek girişli doğrusal bir sistemin yer aldığı Örnek 1 [8] ele alınarak, zaman ufku  $T = 20$  seçilerek CasADi [14] ile çözdürülmüştür.

**Örnek 1:**  $n = 3$  ve  $m = 1$  için, (10)'daki dinamikler ele alınmıştır.

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, Q = I, \quad (10)$$

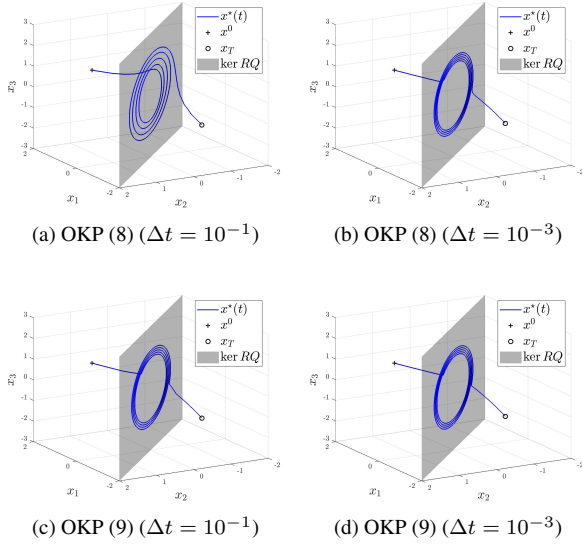
ayrıca  $B = (1, 0, 0)^T$ ,  $\mathbb{U} = [-10, 10]$ , başlangıç ve son durum koşulları  $x^0 = (1, 1, 1)^T$  ve  $x_T = (-1.2, -0.7, -1)^T$  olarak seçilmiştir.

Ayrık OKP'lerin (6)'de verilen her örnekleme zamanıyla çözümüyle elde edilen optimal kontrol ve durum çiftleri  $(\tilde{u}_e, \tilde{x}_e)$  ve  $(\tilde{u}_s, \tilde{x}_s)$  ile gösterilmiştir. Şekil 1'de bu optimal kontrol ve durum çiftleriyle elde edilen maliyet fonksiyonu değerleri örnekleme zamanına göre çizdirilmiştir. Şekilden de görülebileceği üzere tedarik edilen enerji teriminin kullanıldığı  $\tilde{J}^e(\tilde{x}_e, \tilde{u}_e)$ , yayılan enerji teriminin kullanıldığı  $\tilde{J}^s(\tilde{x}_s, \tilde{u}_s)$  maliyet fonksiyonuna göre ayrıklaştırmadan ve örnekleme zamanının seçiminden çok daha fazla etkilenmiştir. Örnekleme zamanı küçüldükçe  $\tilde{J}^e(\tilde{x}_e, \tilde{u}_e)$ 'in daha doğru bir değere yakınsadığı, iki maliyet fonksiyonunun değerleri arasındaki fark olan  $c$  sabit değerinin şekilde oluşmasıyla görülmektedir.



Şekil 1:  $\tilde{J}^e(\tilde{x}_e, \tilde{u}_e)$  ve  $\tilde{J}^s(\tilde{x}_s, \tilde{u}_s)$  farklı örnekleme zamanlarına göre karşılaştırılması.  $c = H(x(20)) - H(x(0))$  sabit değeri ifade etmektedir.

OKP (4) ya da  $J^s$  maliyet fonksiyonuyla elde edilen eş değer OKP'nin,  $\ker(RQ)$  alt uzayına göre turnpike özelliği gösterdiği bir önceki bölümde ifade edilmişti. Şekil 2'de ayrık OKP'lerin çözümünden elde edilen optimal yörüngelerin  $\ker(RQ)$  alt uzayına göre farklı örnekleme zamanları için çizimi verilmiştir. Şekilde görüldüğü üzere elde edilen tüm optimal yörüngeler başlangıç durumundan son duruma geçerken zamanın çoğunu  $\ker(RQ)$  alt uzayında geçirerek turnpike özelliği göstermektedir. Ancak yine de OKP (8) ile elde edilen çözümlerde örnekleme zamanının değişimine göre bir farklılık gözükürken, OKP (9) ile elde edilen çözümlerin neredeyse hiç farklılık göstermediği görülmektedir. Bu nedenle, OKP (9)'in ayrıklaştırmaya göre daha dayanıklı olduğu söylenebilir. Bundan sonraki bölümlerde, ayrıklaştırmaya dayanıklılığı sebebiyle benzetim çalışmalarında enerji verimli OKP için OKP (9) kullanılacaktır ve performansı karesel kontrol terimiyle oluşturulmuş maliyet fonksiyonu ile karşılaştırılacaktır.



Şekil 2: OKP (8) ve (9) çözümlüyle elde edilen optimal yörüngeler ( $T = 20$ ).

#### 4. Önerilen maliyet fonksiyonunun karesel kontrol terimiyle karşılaştırılması

Optimal kontrol problemlerinde sıklıkla tercih edilen maliyet fonksiyonlarından biri, karesel kontrol teriminin cezalandırıldığı maliyet fonksiyonudur. Bunun nedeni kontrol işaretinin cezalandırılmasının fiziksel sistemler düşünüldüğünde mantıklı olması ve karesel terimin matematiksel olarak kolaylık sağlamasıdır. Karesel kontrol terimi maliyet fonksiyonunda bulunduğu anda, kontrol kısıtlarının olmadığı durumda Riccati teoremi uygulanabilmektedir.

Bu bölümde tekil OKP (4) ile karesel kontrol teriminin kullanıldığı OKP, bir önceki bölümde ele alınan durum geçiş problemi üzerinden kıyaslanacaktır. Sürekli zamanda bu OKP, (11)'deki gibi tanımlanır.

$$\min_{u \in \mathcal{M}([0, T], U)} J^c(x, u) =: \int_0^T \|u(t)\|^2 dt \quad (11)$$

s.t. (1a),  $x(0) = x^0$ ,  $x(T) = x_T$ .

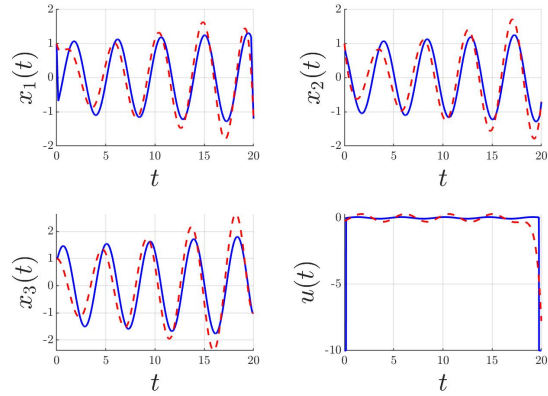
Bu OKP'nin, Bölüm 3'te gösterildiği gibi ayrıklaştırılmasıyla OKP (12) elde edilir.

$$\min_{u = (u_k)_{k=0}^{N-1} \in U^N} \tilde{J}^c(x, u) := \Delta t \sum_{k=0}^{N-1} u_k^\top u_k, \quad (12)$$

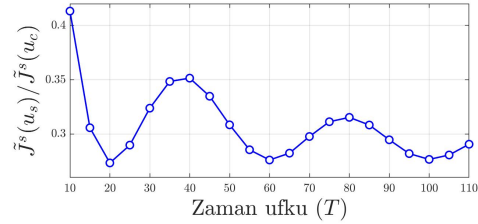
s.t. (7a),  $x(0) = x^0$ ,  $x_N = x_T$ .

Şekil 3'te iki OKP'nin zaman ufkunun  $T = 20$  seçilmesiyle çözümlünden elde edilen optimal yörünge ve kontrolün benzetim çalışmaları verilmiştir. Şekle göre OKP (9) çözümünden elde edilen kontrol sinyalinin zaman ufkunun başında ve sonunda kısıtların sınırlarına dayandığı, geri kalan bölümde ise sıfıra çok yakın hareket ettiği görülmüştür. OKP (12) çözümünü elde edilen kontrol sinyalinin ise başta ve sonda daha az agresif bir davranış sergilediği, ortalarda ise sıfıra yakın ancak biraz

daha büyük salınımlar yaptığı görülmüştür. Bu davranış farklılığının enerji harcanması bakımından nasıl sonuçlandığını görmek için Şekil 4'te harcanan enerji oranının verildiği grafik elde edilmiştir. Bu grafiğe göre zaman ufku seçiminin enerji harcanma oranını etkilediği ancak yine de genele bakılacak olursa OKP (9) ile en az üç kat daha enerji verimli sonuç alındığı görülmektedir.

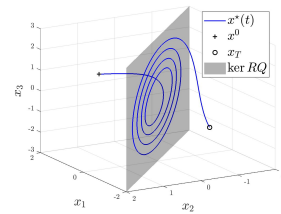


Şekil 3: OKP (9) (—) OKP (12) (---) çözümlüyle elde edilen optimal yörüngeler ve kontrol işareti ( $T = 20$ ,  $\Delta t = 10^{-2}$ ).



Şekil 4: Farklı zaman ufuklarına göre  $\tilde{J}^s(u_s)/\tilde{J}^s(u_c)$ .

Ayrıca Şekil 5'te OKP (12) çözümünden elde edilen optimal durumlar, yayılmacı olmayan alt uzayla birlikte çizdirilmiştir. Buna göre, OKP (12)'in de bu alt uzaya göre turnpike özelliği gösterdiği görülmektedir. Bir sonraki bölümde bu iki maliyet fonksiyonu yörünge takibi problemi içinde karşılaştırılacaktır.



Şekil 5: OKP (12) çözümünüyle elde edilen optimal yörüngeler ( $\Delta t = 10^{-2}$ ).

## 5. Model öngörülü kontrolör ile yörünge takibi

Bu bölümde tedarik enerjisi terimi ile karesel kontrol terimi yörünge takibi problemi ele alınarak karşılaştırılacaktır. Buna göre yeni OKP, (13)'teki gibi oluşturulmuştur.

$$\begin{aligned} \min_{u \in \mathcal{M}([0, T], \mathbb{U})} J^{t,e}(x, u) &:= \int_0^T \|Cx(t) - y^{\text{ref}}(t)\|^2 dt \\ &+ \int_0^T u(t)^\top y(t) dt, \quad (13) \\ \text{s.t. } (1a), x(0) &= x^0. \end{aligned}$$

Burada  $C \in \mathbb{R}^{n \times p}$  takip matrisi,  $y^{\text{ref}} \in L^2([0, T], \mathbb{R}^p)$  istenen çıkışı belirtmektedir. Bu problem ile amaç yörünge takibi yaparken, harcanan enerjiyi de minimize etmektir. Bir başka farklılık ise bu problemde son durum kısıtının olmamasıdır. Eş değer problem yayılan enerji terimi ile yazılmak istenirse (14)'teki gibi olmalıdır.

$$\begin{aligned} \min_{u \in \mathcal{M}([0, T], \mathbb{U})} J^{t,s}(x, u) &:= \int_0^T \|Cx(t) - y^{\text{ref}}(t)\|^2 dt \\ &+ \int_0^T x(t)^\top Q^\top R Q x(t) dt + H(x(T)), \quad (14) \\ \text{s.t. } (1a), x(0) &= x^0. \end{aligned}$$

Aynı şekilde karesel kontrol teriminin bulunduğu ikinci OKP, (15)'teki gibi oluşturulmuştur.

$$\begin{aligned} \min_{u \in \mathcal{M}([0, T], \mathbb{U})} J^{t,c}(x, u) &:= \int_0^T \|Cx(t) - y^{\text{ref}}(t)\|^2 dt \\ &+ \int_0^T u(t)^\top u(t) dt, \quad (15) \\ \text{s.t. } (1a), x(0) &= x^0. \end{aligned}$$

Bu OKP'lerin çözümü sonucu elde edilen optimal kontrollere sırasıyla  $u_{t,s}$  ve  $u_{t,c}$  ile gösterilmiştir. Bu problemler yine Bölüm 3'te verilen şekilde ayrılaştırılmıştır ve Algoritma 1'de verildiği şekilde model öngörülü kontrol şemasına uygulanmıştır.

**Verilenler:** İlk durum  $x^0$ , örnekleme zamanı  $\Delta t$ ,

Tahmin ufku  $T$ , simülasyon ufku  $N$

**while**  $n \leq N$  **do**

OKP (14) ya da (15) çözülür

optimal kontrol sekansı bulunur

$u(\cdot) = u(k)_{k \in \{0, 1, \dots, N-1\}}$

sekansın ilk elemanı sisteme (7a) uygulanır

$u := u(0)$  for  $[k\Delta t, (k+1)\Delta t]$

$x^0 \leftarrow x_{k+1}$

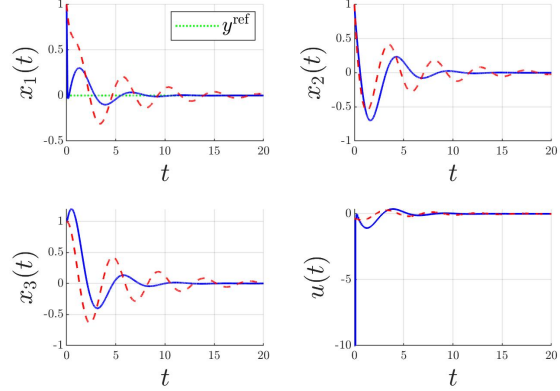
$n \leftarrow n + 1$

**end**

**Algoritma 1:** Model öngörülü kontrol.

Örnek 1'deki son durum kısıtı kaldırılarak ve  $C = (1, 0, 0)$ ,  $y^{\text{ref}}(t) \equiv 0$  seçilerek sistemin ilk durumu verilen referans işaretini takibe zorlanmıştır. Model öngörülü kontrolör algoritmasında tahmin ufku  $3s$  seçilmiştir ve yörünge takibi sonuçları Şekil 6 ile gösterilmiştir. Buna göre OKP 14'ün OKP 15'e göre daha hızlı ve daha az salımlı bir şekilde

referans sinyaline yakınsadığı görülmektedir. Yörünge takibi performansı ile harcanan enerjinin aynı anda kıyaslanmasıyla  $J^{t,s}(u_{t,s})/J^{t,s}(u_{t,c}) = 0.33$  oranı elde edilmiştir. Buna göre OKP 14 en az üç kat daha fazla enerji verimli sonuç sergilemiştir.



Şekil 6: OKP (14) (—) ve OKP (15) (---)'nin Örnek 1 için model öngörülü kontrolör ile yörünge takibi ( $\Delta t = 10^{-1}$ ).

## 6. Sonuçlar

Bu çalışmada doğrusal pH sistemlerinin optimal kontrol problemi işlenmiştir. Öncelikle pH sistemlerinin sağladıkları enerji denge denklemlerinden yola çıkarak, minimum tedarik enerjisiyle durum geçiş probleminin çözülebileceği OKP öne sürülmüştür. Daha sonra yine enerji denge denklemi kullanılarak, bu OKP'ye eş değer yeni bir OKP elde edilmiş ve bu problemler ayrı zamanda karşılaştırılmıştır. Bunun sonucunda sürekli zamanda eş değer iki OKP'nin ayrı zamanda ayrıştırma şemasına ve örnekleme zamanı seçimine göre farklı sonuçlar verebileceği görülmüştür. Daha sonra bu önerilen maliyet fonksiyonu, yaygın olarak bilinen karesel kontrol teriminin yer aldığı maliyet fonksiyonuyla aynı durum geçiş problemi için enerji verimliliği kıstas alınarak karşılaştırılmıştır. Sonuçta önerilen maliyet fonksiyonunun enerji verimliliğini önemli derece artırdığı görülmüştür. Son olarak bu maliyet fonksiyonları model öngörülü kontrolör yapısı kullanılarak yörünge takip problemi için karşılaştırılmışlar ve yörünge takibi için karesel kontrol teriminin cezalandırılmasına gerek duyulmadan enerji verimli bir sonuç elde etmenin mümkün olduğu gösterilmiştir. Bundan sonraki çalışmalarda yüksek mertebeden ayrıştırma şemalarının etkisi incelenecektir.

## 7. Teşekkür

Gökçen Devlet Şen, Alman Akademik Değişim Servisi (DAAD) kurumuna bir senelik araştırma bursu için teşekkür eder. Bu çalışma Gökçen Devlet Şen'in akademik çalışma için TU Ilmenau'da bulunduğu süre içinde gerçekleşmiştir.

## 8. Kaynakça

- [1] Arjan Van Der Schaft, Dimitri Jeltsema, et al., “Port-Hamiltonian systems theory: An introductory overview,” *Foundations and Trends® in Systems and Control*, vol. 1, no. 2-3, pp. 173–378, 2014.
- [2] Ramy Rashad, Federico Califano, Arjan J van der Schaft, and Stefano Stramigioli, “Twenty years of distributed port-Hamiltonian systems: a literature review,” *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, vol. 37, no. 4, pp. 1400–1422, 2020.
- [3] Lars Grüne, “Dissipativity and optimal control: Examining the turnpike phenomenon,” *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 42, no. 2, pp. 74–87, 2022.
- [4] Timm Faulwasser and Lars Grüne, “Turnpike properties in optimal control: An overview of discrete-time and continuous-time results,” in *Numerical Control: Part A*, Emmanuel Trélat and Enrique Zuazua, Eds., vol. 23 of *Handbook of Numerical Analysis*, pp. 367–400. Elsevier, 2022.
- [5] Lars Grüne, “Economic receding horizon control without terminal constraints,” *Automatica*, vol. 49, no. 3, pp. 725–734, 2013.
- [6] Lukas Kölsch, Pol Jané Soneira, Felix Strehle, and Sören Hohmann, “Optimal control of port-hamiltonian systems: A continuous-time learning approach,” *Automatica*, vol. 130, pp. 109725, 2021.
- [7] Onur Tanil Doganay, Kathrin Klamroth, Bruno Lang, Michael Stiglmayr, and Claudia Totzeck, “Optimal control for port-hamiltonian systems and a new perspective on dynamic network flow problems,” *arXiv preprint arXiv:2303.15082*, 2023.
- [8] Manuel Schaller, Friedrich Philipp, Timm Faulwasser, Karl Worthmann, and Bernhard Maschke, “Control of port-Hamiltonian systems with minimal energy supply,” *European Journal of Control*, vol. 62, pp. 33–40, 2021.
- [9] Timm Faulwasser, Bernhard Maschke, Friedrich Philipp, Manuel Schaller, and Karl Worthmann, “Optimal control of port-Hamiltonian descriptor systems with minimal energy supply,” *SIAM Journal on Control and Optimization*, vol. 60, no. 4, pp. 2132–2158, 2022.
- [10] Timm Faulwasser, Jonas Kirchhoff, Volker Mehrmann, Friedrich Philipp, Manuel Schaller, and Karl Worthmann, “Hidden regularity in singular optimal control of port-hamiltonian systems,” *arXiv preprint arXiv:2305.03790*, 2023.
- [11] Manuel Schaller, Amelie Zeller, Michael Böhm, Oliver Sawodny, Cristina Tarín, and Karl Worthmann, “Energy-optimal control of adaptive structures,” *arXiv preprint arXiv:2306.13331*, 2023.
- [12] Paul Kotyczka and Laurent Lefèvre, “Discrete-time port-Hamiltonian systems: A definition based on symplectic integration,” *Systems & Control Letters*, vol. 133, pp. 104530, 2019.
- [13] Volker Mehrmann and Riccardo Morandin, “Structure-preserving discretization for port-Hamiltonian descriptor systems,” in *58th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, 2019, pp. 6863–6868.
- [14] Joel AE Andersson, Joris Gillis, Greg Horn, James B Rawlings, and Moritz Diehl, “Casadi: a software framework for nonlinear optimization and optimal control,” *Mathematical Programming Computation*, vol. 11, pp. 1–36, 2019.