Doğrusal Olmayan Çok Etmenli Ağlarda Küme Onaylaşım Problemi
Cluster Consensus Problem in Nonlinear Multi-Agent Networks

Ümit Develer[1], *Onur Cihan*[2], *Mehmet Akar*[1]

[1]Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Bölümü
Boğaziçi Üniversitesi, İstanbul
umit.develer@boun.edu.tr
mehmet.akar@boun.edu.tr
[2]Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Bölümü
Marmara Üniversitesi, İstanbul
onur.cihan@marmara.edu.tr

Özetçe

Bu çalışma doğrusal olmayan dinamiklere sahip çok etmenli ağlar için küme onaylaşım problemini incelemektedir. Yönlü bir çizge üzerinde gelişen bir sistem için sistemin küme onaylaşımını garanti edecek kararlılık koşullarını ortaya koyduk. Literatürdeki küme onaylaşım problemi üzerine var olan sonuçların aksine, kümeler ve onların elemanları önceden belirlenmemiştir. Toplam küme sayısı ve her kümenin elemanları altta yatan yönlü çizgenin birincil ve ikincil katman alt çizgelerinden açıkça hesaplanmaktadır. Kuramsal sonuç nümerik bir örnekle gösterilmiştir.

Abstract

This paper investigates the cluster consensus problem for multi-agent networks with nonlinear dynamics. For a system evolving over a directed graph, we state the stability conditions which ensure the system to converge cluster consensus. Contrary to the existing results on the cluster consensus problem in the literature, the clusters and their members are not predetermined. The total number of clusters and members of each cluster are explicitly computed from the primary and secondary layer subgraphs of the underlying directed graph. Theoretical result is illustrated via a numerical example.

1. Giriş

Çok etmenli ağlarda onaylaşım problemi; kontrol mühendisliği, sosyal ağlar, otonom robotlar gibi farklı çalışma alanlarında potansiyel uygulamaları sebebiyle birçok araştırmacı tarafından çalışılmıştır [1–5]. Basit bir dilde, *onaylaşım*, dağıtık ağ ile modellenen sistemlerdeki tüm elemanların ortak bir değere, duruma ya da yörüngeye yakınsamasıdır. *Küme onaylaşımı* ise verilen sistemi oluşturan elemanların birden fazla değerde ya da durumda karar kılması olayıdır. Literatürde var olan birçok çalışmada, küme onaylaşım problemi doğrusal dinamikli sistemler için ele alınmıştır [6–8]. Halbuki, gerçek dünyada çalışan birçok sistem doğrusal olmayan dinamiklerle modellenmiştir.

Bu bildiride amacımız doğrusal olmayan dinamiklere sahip çok etmenli sistemlerde küme onaylaşım problemini incelemektir. Konu ile ilgili literatürdeki bazı çalışmalar aşağıdaki gibi gözden geçirilmiştir.

[9]'da çizge kuramı, matris teorisi ve Lyapunov'un doğrudan yöntemi kullanılarak doğrusal olmayan dinamiklere sahip bir sistemin onaylaşıma ulaşmasını garanti edecek yeterli koşullar elde edilmiştir. Fakat bu çalışmada, küme onaylaşım problemi ele alınmamıştır. [10]'da yazarlar doğrusal olmayan bir ağın küme onaylaşım problemini yakınsama teorisi ve Lyapunov fonksiyonları kullanarak incelemişlerdir. Elde edilen yeterli koşul sadece kümelerin önceden belirlendiği sistemler için geçerlidir. [11]'de, içsel, doğrusal olmayan dinamiklere sahip ağlar için sabit zamanlı küme takip problemi incelenmiştir. Yazarlar, her alt kümedeki takipçi etmenlerin kendi liderlerini takip etmesini garanti eden bir protokol önermişlerdir. [12]'de, doğrusal olmayan protokoller vasıtasıyla haberleşen işbirlikçi-rekabetçi etkileşimli etmenlerin olduğu sistemlerde küme onaylaşım problemi incelenmiştir. Lyapunov metodu kullanarak, yazarlar küme onaylaşımının ancak ve ancak kümelerdeki etmenlerin aynı etkileşim özelliklerine sahip olması ile mümkün olacağını ispatlamışlardır.

Bu çalışmada, doğrusal olmayan dinamiklere sahip sistemler için küme onaylaşım problemi ve özellikleri incelenmiştir. Literatürde var olan çalışmaların aksine, kümeler önceden belirlenmeden küme onaylaşımını garanti eden koşullar ortaya konulmuştur. Problemin analizinde, bazı sonuçlar literatürde var olan çalışmalar kullanılarak türetilmiştir. Bu bildiride ele alınan çalışmalar aşağıdaki gibi özetlenebilir:

1) Doğrusal olmayan dinamiklere sahip sistemler için küme onaylaşım problemi gözden geçirilmiştir.

2) Bu sistemler için küme sayısı ve küme elemanları birincil ve ikincil katman alt çizge kavramları kullanılarak hesaplanmıştır.

3) Küme onaylaşımını garanti edecek kararlılık koşulları elde edilmiştir.

Bildirinin geri kalanı şu şekilde düzenlenmiştir. Bölüm 2'de çizge kuramı ile ilgili temel bilgiler verilmiş ve birincil/ikincil katman alt çizge tanımları gözden geçirilmiştir. Bölüm 3'te doğrusal olmayan dağıtık onaylaşım algoritması verilmiş ve küme onaylaşımı için kararlılık koşulları elde edilmiştir. Bölüm 4'te elde edilen sonucu doğrulamak için benzetim çalışmalarına yer verilmiştir. Son olarak, Bölüm 5'te bildiri ile ilgili sonuçlar ve gelecekteki araştırma konuları yer almaktadır.

2. Çizge Kuramı

n etmenden oluşan bir ağda etmenler arasındaki bağlantılar yönlü bir çizge $\mathcal{G} = \{\mathcal{V}, \mathcal{E}\}$ ile modellenir. Burada $\mathcal{V} = \{\nu_1, \ldots, \nu_n\}$ etmenler kümesini, $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ kenarlar kümesini ifade eder. Yönlü bir kenar (ν_j, ν_i), ν_j etmeninden ν_i etmenine doğru olan bilgi akışını gösterir. Bitişiklik matrisi $\mathcal{A}$ yönlü kenarların ağırlıklarını içeren bir matristir. Bu matrisin elemanlarının (a_{ij}) aşağıdaki koşulu sağladığı varsayılmıştır:

$$a_{ij} = \begin{cases} > 0, & \text{eğer } (\nu_j, \nu_i) \in \mathcal{E} \\ = 0, & \text{eğer } (\nu_j, \nu_i) \notin \mathcal{E}. \end{cases}$$

ν_i etmeninin komşuluk kümesi, ν_i etmenine bitişik olan etmenleri içeren kümedir ve $\mathcal{N}_i = \{\nu_j : (\nu_j, \nu_i) \in \mathcal{E}\}$ ile ifade edilir. İki etmen arasındaki yönlü yol, etmenleri birbirine bağlayan yönlü kenar sekansları ile ifade edilir. Örneğin, ν_j etmeninden ν_i etmenine doğru yönlü bir yol varsa, bu yol $(\nu_{k_1}, \nu_{k_2}), (\nu_{k_2}, \nu_{k_3}), \ldots, (\nu_{k_{m-1}}, \nu_{k_m})$, $k_1 = j$, $k_m = i$ ile ifade edilir. Yönlü bir çizgede, tüm etmenlere giden yönlü yola sahip olan bir etmen varsa, o çizge *kapsayan ağaç* içerir ve o etmen *kök* etmendir.

Küme onaylaşım probleminin analizinde, küme sayılarını belirlemek için birincil ve ikincil katman alt çizge konseptleri kullanılmıştır. Bu alt çizgelerin tanımları aşağıda verilmiştir:

Tanım 1. *[13] (Birincil Katman Alt Çizgesi) Verilen bir $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ yönlü çizgesinde, l_p adet benzersiz $\mathcal{G}_{p,i} = (\mathcal{V}_{p,i}, \mathcal{E}_{p,i})$, $i = 1, \ldots, l_p$, alt çizgesi vardır ki aşağıdaki koşulları sağlar:*

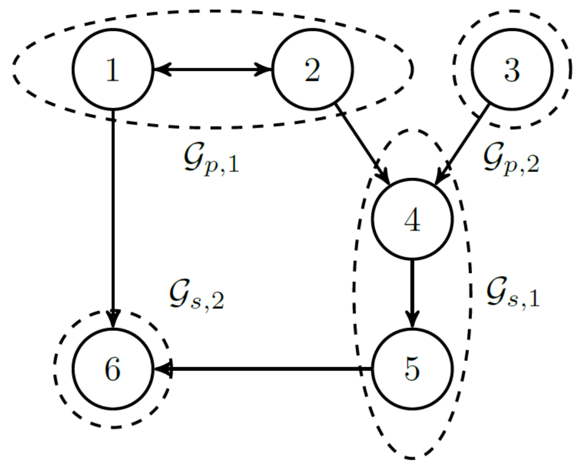
- *Her alt çizgenin etmen kümesi $\mathcal{V}_{p,i}$, $i = 1, \ldots, l_p$, mümkün olan en fazla etmen sayısına sahiptir ve kapsayan ağaç içerir.*
- *Bir alt çizgedeki etmenler $(\mathcal{V}_{p,i})$ bulunduğu alt çizge dışından $(\mathcal{V} \setminus \mathcal{V}_{p,i})$ bilgi alamaz.*

Tanım 2. *[13] (İkincil Katman Alt Çizgesi) Birincil katman alt çizgelerinde bulunmayan etmenlerin oluşturduğu küme $\bar{\mathcal{V}} = \mathcal{V} \setminus \bigcup_{i=1}^{l_p} \mathcal{V}_{p,i}$ olsun. $\bar{\mathcal{V}}$ kümesinde l_s adet benzersiz $\mathcal{G}_{s,j} = (\mathcal{V}_{s,j}, \mathcal{E}_{s,j})$, $j = 1, \ldots, l_s$, alt çizgesi vardır ki aşağıdaki koşulları sağlar:*

- *Her alt çizge, $\mathcal{G}_{s,j}$, $j = 1, \ldots, l_s$, kapsayan ağaç içerir.*
- *Bir alt çizgenin kök etmeni, çizge dışından en az iki farklı çizgedeki iki etmenden bilgi alır.*
- *Bir alt çizgedeki kök etmen dışındaki diğer tüm etmenler bulundukları alt çizge dışından bilgi alamaz.*

Birincil ve ikincil katman alt çizgelerinin belirlenmesi göstermek için aşağıdaki örnek verilmiştir:

Örnek 1. *Şekil 1'deki 6 etmen ve 7 kenarlı ağı ele alalım. Tanım 1 ve Tanım 2'deki birincil ve ikincil katman alt çizge tanımları kullanılarak etmen kümeleri $\mathcal{V}_{p,1} = \{\nu_1, \nu_2\}$, $\mathcal{V}_{p,2} = \{\nu_3\}$, $\mathcal{V}_{s,1} = \{\nu_4, \nu_5\}$, $\mathcal{V}_{s,2} = \{\nu_6\}$ olarak belirlenir. Burada $\mathcal{V}_{p,1}$ ve $\mathcal{V}_{p,2}$ birincil katman alt çizgelerinin etmen kümeleri; $\mathcal{V}_{s,1}$ ve $\mathcal{V}_{s,2}$ ikincil katman alt çizgelerinin etmen kümleridir. Her birincil katman alt çizgesi $(\mathcal{G}_{p,1}, \mathcal{G}_{p,2})$ kapsayan ağaç içerir ve dışarıdan herhangi bir bilgi almaz. Diğer yandan, her ikincil katman alt çizgesi $(\mathcal{G}_{s,1}, \mathcal{G}_{s,2})$ kapsayan ağaç içerir, kök etmeni çizge dışından en az iki farklı çizgedeki iki etmenden bilgi alır ve diğer etmenleri çizge dışından herhangi bir bilgi almaz.*



Şekil 1: 6 etmen ve 7 kenar içeren yönlü bir ağ.

3. Problem Formülasyonu

Bu bölümde, doğrusal olmayan dinamiklere sahip çok etmenli sistemlerde küme onaylaşım algoritması ve bu algoritmanın yakınsama koşulları incelenecektir. Her ν_i etmeni aşağıdaki gibi doğrusal olmayan bir sistem dinamiğine sahiptir:

$$\dot{x}_i(t) = f_i(x(t)), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{1}$$

Burada $x_i(t)$, ν_i etmeninin durumu, $f_i(x(t))$ ise Lipschitz sürekli doğrusal olmayan bir fonksiyondur ve aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$f_i(x(t)) = \sum_{\nu_i \in \mathcal{N}_i} a_{ij} \left[h(x_j(t)) - h(x_i(t)) \right] \tag{2}$$

Burada $h(\cdot)$ fonksiyonu doğrusal olmayan tek fonksiyondur. $(h(-x) = -h(x))$. Bu fonksiyonun aşağıdaki varsayımı sağladığı kabul edilmiştir:

Varsayım 1. *$h(x(t))$ doğrusal olmayan fonksiyonunun aşağıdaki özellikleri sağladığı varsayılmıştır:*

- *$x \neq x^*$ için $(h(x) - h(x^*))(x - x^*) > 0$*
- *$h(0) = 0$*
- *$|x - x^*| \to \infty$ için $\int_{x^*}^{x} h(\tau) - h(x^*) d\tau \to \infty$*

Sistem dinamikleri aşağıdaki formda tekrar yazılabilir:

$$\dot{x}_i(t) = -\sum_{\nu_i \in \mathcal{N}_i} l_{ij} h(x_j(t)), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{3}$$

Burada l_{ij}, L Laplace matrisinin elemanıdır ve aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$l_{ij} = \begin{cases} \sum\limits_{k=1, k\neq i}^{n} a_{ik}, & \text{eğer } i = j \\ -a_{ij}, & \text{eğer } i \neq j. \end{cases}$$

Sistem (3) aşağıdaki gibi matris formunda tekrar yazılabilir:

$$\dot{x}(t) = -L\bar{h}(x(t)) \tag{4}$$

Burada $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) & \ldots & x_n(t) \end{bmatrix}^T$ ve $\bar{h}(x(t)) = \begin{bmatrix} h(x_1(t)) & \ldots & h(x_n(t)) \end{bmatrix}^T$. Birincil ve ikincil katman alt çizge tanımları kullanılarak sistem (4) aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_p(t) \\ \dot{x}_s(t) \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} L_p & 0 \\ L_{sp} & L_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{h}(x_p(t)) \\ \bar{h}(x_s(t)) \end{bmatrix} \tag{5}$$

Burada $x_p(t)$ ve $x_s(t)$ sırasıyla birincil ve ikincil katman alt çizgelerinin durum vektörleridir. L_p, L_{sp} ve L_s matrisleri aşağıdaki şekilde elde edilebilir:

$$L_p = \begin{bmatrix} L_{1,1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & L_{l_p,l_p} \end{bmatrix},$$

$$L_{sp} = \begin{bmatrix} L_{l_p+1,1} & \cdots & L_{l_p+1,l_p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{l_p+l_s,1} & \cdots & L_{l_p+l_s,l_p} \end{bmatrix},$$

$$L_s = \begin{bmatrix} L_{l_p+1,l_p+1} & \cdots & L_{l_p+1,l_p+l_s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{l_p+l_s,l_p+1} & \cdots & L_{l_p+l_s,l_p+l_s} \end{bmatrix}$$

L_p, L_{sp} ve L_s matrislerinin yapısal özellikleri [5] numaralı referanstaki makalede verilmiştir. Birincil ve ikincil katman dinamikleri ayrı olarak ele alınabilir. Bu bağlamda birincil katman dinamikleri aşağıdaki gibidir:

$$\dot{x}_{p,i}(t) = -L_{i,i}\bar{h}(x_{p,i}(t)), \quad i = 1, \ldots, l_p \tag{6}$$

Burada $x_{p,i}(t)$, i'ninci birincil katman alt çizgesinin durum vektörüdür. Her birincil katman alt çizgesi birbirinden bağımsız olduğu ve kapsayan ağaç içerdiği için [9] numaralı referanstaki Kuram 2 ışığında birincil katman dinamikleri l_p adet ayrık kümeye yakınsar.

İkincil katman alt çizge dinamikleri ise aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\dot{x}_s(t) = -L_s\bar{h}(x_s(t)) - L_{sp}\bar{h}(x_p(t)) \tag{7}$$

Birincil katman alt çizge dinamiklerinden $\bar{h}(x_p(t))$ fonksiyonunun bazı değerlere yakınsadığını biliyoruz. İkincil katman dinamiklerinin otonom kısmı aşağıdaki gibidir:

$$\dot{x}_s(t) = -L_s\bar{h}(x_s(t)) \tag{8}$$

Eğer yukarıdaki denklemin asimptotik kararlı olduğu gösterilebilirse, ikincil katman dinamiklerinin denge noktası bulunabilir. L_s matrisi bir tekil olmayan M matrisi olduğu için aşağıdaki gibi bir positif diyagonal $D = [d_{ii}]$ matrisi mevcuttur:

$$DL_s + L_s^T D > 0 \tag{9}$$

Bu bağlamda aşağıdaki gibi bir Lyapunov fonksiyonunu ele alalım:

$$V(x(t)) = \sum_i d_{ii} \int_0^{x_i(t)} \bar{h}(y)dy \tag{10}$$

Varsayım 1'den $\int_0^{x_i(t)} \bar{h}(y)dy$ ifadesinin radyal olarak sınırsız olduğu ve $V(x(t))$ ifadesinin $x(t) \neq 0$ için $V(x(t)) > 0$ ve $x(t) = 0$ için $V(x(t)) = 0$ olduğu kolaylıkla bulunabilir. $V(x(t))$ fonksiyonunu türevi aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) =& \sum_i d_{ii}\bar{h}(x_i(t))\dot{x}_i(t) \\ =& \bar{h}(x_s(t))D\dot{x}_s(t) \\ =& -\bar{h}(x_s(t))^T DL_s\bar{h}(x_s(t)) \\ =& -\frac{1}{2}\bar{h}(x_s(t))^T DL_s\bar{h}(x_s(t)) \\ & -\frac{1}{2}\bar{h}(x_s(t))^T L_s^T D\bar{h}(x_s(t)) \\ =& -\frac{1}{2}\bar{h}(x_s(t))(DL_s + L_s^T D)\bar{h}(x_s(t)) \end{aligned}$$

$DL_s + L_s^T D > 0$ olduğundan $x(t) \neq 0$ için $\dot{V}(x(t)) < 0$ ifadesi sağlanır. Bu yüzden otonom sistem (8) asimptotik olarak kararlıdır.

İkincil katman dinamiklerinin denge noktası $\dot{x}_s(t) = 0$ çözümü yapılarak aşağıdaki gibi bulunabilir:

$$\bar{h}(x_s^*) = -L_s^{-1}L_{sp}\bar{h}(x_p^*) \tag{11}$$

Burada x_p^* ve x_s^*, sırasıyla, birincil ve ikincil katman alt çizgelerinin denge noktalarıdır. $\bar{h}(\cdot)$ birebir bir fonksiyon olduğu için [5] numaralı referanstaki Kuram 2.5 ışığında ikincil katman dinamikleri l_s adet ayrık kümeye yakınsar.

Verilen herhangi bir sistemin toplam küme sayısı $l_p + l_s$ olarak bulunur.

Yukarıdaki bilgiler ışığında aşağıdaki kuram elde edilebilir:

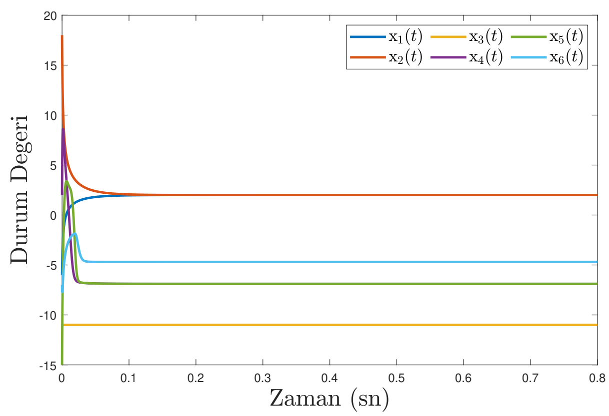
Kuram 1. *Doğrusal olmayan bir $h(x)$ fonksiyonu Varsayım 1'i sağlasın. Öyleyse, verilen herhangi çok etmenli bir sistem* (4) *için toplam küme sayısı $l_p + l_s$ adettir. Burada l_p ve l_s, sırasıyla, birincil ve ikincil katman alt çizgelerinin sayısıdır.*

4. Benzetim Çalışmaları

Bu bölümde, elde edilen sonucu doğrulamak için benzetim çalışması yapılmıştır. Şekil 1'deki ağı tekrar ele alalım. Birincil ve ikincil katman alt çizge tespit algoritmalarına göre bu ağda 2 adet birincil ve 2 adet ikincil katman alt çizgesi mevcuttur. Bu ağ için aşağıdaki Laplacian sistem matrisi kullanılmıştır:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 6 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 0 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

Varsayım 1'i sağlayan $h(x) = x^3$ fonksiyonu, doğrusal olmayan fonksiyon olarak (2) numaralı dinamikte kullanılmıştır. Durum vektörünün başlangıç değeri $x(0) = \begin{bmatrix} -6 & 18 & -11 & 2 & -15 & -7 \end{bmatrix}^T$ olarak alınmıştır. Bu dinamikler ışığında, benzetim sonucu Şekil 2'deki gibi elde edilmiştir. Buna göre birincil ve ikincil katman alt çizge tespit algoritmaları ile belirlenen kümeler aynı şekilde elde edilmiştir. Kuram 1'deki sonuç böylece doğrulanmıştır.



Şekil 2: $h(x) = x^3$ için Şekil 1'de ağın benzetim sonucu.

5. Sonuçlar

Bu bildiride doğrusal olmayan onaylaşım algoritması kullanan çok etmenli ağlarda küme onaylaşım problemi incelenmiştir. Yönlü bir çizge ile modellenen sistemlerde küme onaylaşımını sağlayan koşullar elde edilmiştir. Literatürdeki küme onaylaşım problemi üzerine olan sonuçlar, kümelerin önceden belirlendiği durumları baz alınarak elde edilmiştir. Bu bildirideki sonuçlar, var olan sonuçları kapsamakla beraber kümelerin önceden belirlenmediği durumları da içermektedir. Birincil ve ikincil katman alt çizge konseptleri kullanılarak bu kümeler ve kümelerin elemanları belirlenip toplam küme sayısı hesaplanmaktadır. Elde edilen sonuç simülasyon çalışması ile desteklenmiştir. Yapılması planlanan çalışmalar içinde farklı doğrusal olmayan onaylaşım algoritmalarını kullanan sistemlerin küme onaylaşımı analizi bulunmaktadır.

6. Kaynakça

[1] A. Jadbabaie, J. Lin ve A. S. Morse, "Coordination of groups of mobile autonomous agents using nearest neighbor rules," *IEEE Transactions on Automatic Control*, Cilt: 48, No: 6, s: 988-1001, 2003.

[2] R. Olfati-Saber, J. A. Fax ve R. M. Murray, "Consensus and cooperation in networked multi-agent systems," *Proceedings of the IEEE*, Cilt: 95, No: 1, s: 215-233, 2007.

[3] W. Ren ve R. W. Beard, "Consensus seeking in multiagent systems under dynamically changing interaction topologies," *IEEE Transactions on Automatic Control*, Cilt: 50, No: 5, s: 655-661, 2005.

[4] M. Akar ve R. Shorten, "Distributed probabilistic synchronization algorithms for communication networks," *IEEE Trans. on Automatic Control*, Cilt: 53, No: 1, s: 389-393, 2008.

[5] Ü. Develer ve M. Akar, "Cluster consensus in first and second-Order continuous-time networks with input and communication delays," *International Journal of Control*, Cilt: 94, No: 4, s: 961-976, 2021.

[6] Q. Ma, Z. Wang ve G. Miao, "Second-order group consensus for multi-agent systems via pinning leader-following approach," *Journal of the Franklin Institute*, Cilt: 351, No: 3, s: 1288-1300, 2014.

[7] G. Wang ve Y. Shen, "Second-order of multi-agent dynamical systems with impulsive effects," *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Cilt: 19, No: 9, s: 3220-3228, 2014.

[8] L. Kaien, G. Xie, W. Ren ve L. Wang, "Consensus for multi-agent systems with inherent nonlinear dynamics under directed topologies," *Systems & Control Letters*, Cilt: 62, No: 2, s: 152-162, 2013.

[9] X. Liu, C. Tianping ve L. Wenlian, "Consensus problem in directed networks of multi-agents via nonlinear protocols," *Physics Letters A*, Cilt: 373, No: 35, s: 3122-3127, 2009.

[10] J. Li, G. Zhi-Hong ve C. Guanrong, "Multi-consensus of nonlinearly networked multi-agent systems," *Asian Journal of Control*, Cilt: 17, No: 1, s: 157-164, 2015.

[11] Y. Shang ve Y. Ye, "Fixed-time group tracking control with unknown inherent nonlinear dynamics," *IEEE Access*, Cilt: 5, s: 12833-12842, 2017.

[12] M. Zhou ve X. Li, "Cluster consensus in networks of agents with weighted cooperative-competitive interactions via nonlinear protocols," *34th Chinese Control Conference*, s: 7108-7112, 2015.

[13] Ö. F. Erkan, O. Cihan ve M. Akar, "Analysis of distributed consensus protocols with multi-equilibria under time-delays," *Journal of the Franklin Institute*, Cilt: 355, No: 1, s: 332-360, 2018.