

Zaman Gecikmeli Sabit Kanatlı Çoklu İnsansız Hava Aracı Sistemlerinin Formasyon Uçuş Kontrolü

Formation Flight Control of Time Delayed Fixed-Wing Multiple Unmanned Aerial Vehicle Systems

Şirin Akkaya¹, Handan Nak², Ali Fuat Ergenc³

¹Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, İstanbul Teknik Üniversitesi, İstanbul
Türk Havacılık ve Uzay Sanayii, İstanbul

sakkaya@itu.edu.tr, sirin.akkayaakbati@tai.com.tr

²ASELSAN A.Ş., İstanbul

hnak@aselsan.com.tr

³Kontrol ve Otomasyon Mühendisliği Bölümü
İstanbul Teknik Üniversitesi, İstanbul

ali.ergenc@itu.edu.tr

Özetçe

Bu çalışma, haberleşme ve giriş gecikmesi altında çoklu İHA sisteminin formasyon kontrol problemini incelemeyi amaçlamaktadır. Formasyonun kütle merkezinde sanal lider bir İHA olduğu varsayılmış ve İHA'ların lider İHA'nın yörüngesine bağlı olarak sabit bir formasyon takip etmesi için veri akış topolojisine uygun şekilde komşuları ve lider ile haberleştiği bir formasyon kontrol protokolü önerilmiştir. İHA'ların doğrusal olmayan kinematik modeli geribeslemeli doğrusallaştırma yöntemi ile doğrusal zamanla değişmeyen modele dönüştürülmüş, önerilen kontrol protokolü ve zaman gecikmeleri de eklenerek formasyon uçuş sisteminin kapalı çevrim modeli elde edilmiştir. Formasyon sisteminin kararlılık analizi *Karakteristik Köklerin Küme Davranışı, CTCR*, yöntemi incelenmiş ve nümerik benzetim çalışmaları ile kontrol sisteminin etkinliği doğrulanmıştır.

Abstract

This study aims to examine the formation control problem of multiple UAV systems under communication and input delay. It is assumed that there is a virtual leader UAV in the center of mass of the formation and a consensus-based formation control protocol is proposed in which the UAVs communicate with their neighbors in accordance with the information flow topology in order to follow a constant formation depending on the trajectory of the leader UAV. The nonlinear kinematic model of the UAV system is transformed into a linear time-invariant model by the feedback linearization method, and the closed-loop model of the formation flight system is obtained by adding the proposed control protocol and time delays. Stability analysis of the formation system is examined with *Cluster Treatment of Characteristic Roots, CTCR*, method and the effectiveness of the control system was verified by numerical simulation studies.

1. Giriş

İnsansız hava araçları (İHA) ulaşım, gözetleme, keşif, hedef arama ve tespit gibi görevlerdeki performansları dolayısıyla son yıllarda büyük ilgi görmektedir. Birden fazla insansız hava aracının (çoklu İHA) koordineli olarak beraber çalışması, bu görevlerin yerine getirilmesinde yüksek verimlilik, sağlamlık ve esneklik gibi konularda üstünlüğe sahiptir. İHA'ların bu görevleri yerine getirmek için birlikte çalışmasına olan talebin artmasıyla birlikte çoklu İHA sistemlerinin eş zamanlı kontrolü günümüzde önemli araştırma ve uygulama alanlarından biridir. Genel olarak, birincil araştırma kaygısı, etkili kontrol yöntemleri kullanarak çoklu İHA sistemleri için formasyon kontrolünü oluşturmak ve kararlı hale getirmektir. Formasyon kontrolü, araçların birbirleriyle haberleşerek görelî hareketine dayanan bir kontrol mimarisidir. Sistem sabit bir formasyon yapısına sahip olabileceği gibi araçların zamanla değişen bir formasyona takip etmesi de istenebilir [1–4].

Araçların birbirleriyle sürekli iletişim halinde olmasını gerektiren bu kontrol uygulamalarında birtakım ek zorluklar bulunmaktadır. Bu tür sistemlerin kararlılığını ve performansını etkileyen en önemli kriterlerden biri zaman gecikmesidir. Temel olarak formasyon kontrol sistemlerinde iki tür gecikme vardır. Bunlardan biri İHA'lar arasında veri alışverişi sırasında meydana gelebilecek haberleşme gecikmesidir. Diğeri ise, her İHA'ya gelen paketlerin işlem ve bağlantı süresi sırasında oluşan ve eyleyicilerin kontrolörlere ağlar üzerinden bağlı olduğu sistemlerde de görülen giriş gecikmesidir. Dolayısıyla sistemin istenilen performansı sağlaması ve zaman gecikmelerine rağmen kararlı kalmasını sağlamak için uygun bir kontrolör tasarlamak ve kararlılık analizi yapmak kritik öneme sahiptir [1,5,6]. Literatürde bu tarz sistemlerin kararlılık analizi için çoğunlukla Lyapunov tabanlı kararlılık teoremleri [1,3–7] kullanılmaktadır.

Bu çalışmada birden fazla zaman gecikmesine maruz kalan sabit kanatlı çoklu İHA sistemlerinin sabit formasyon kontrolü

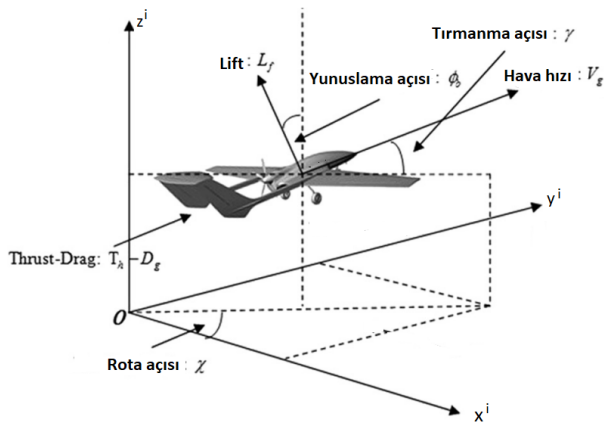
incelenmiştir. Kontrol açısından bakıldığında bu kavram İHA dinamikleri, İHA'lar arasındaki bilgi alışverişini belirleyen haberleşme topolojileri ile İHA'ların görelî hareketini belirleyen formasyon yapısını kapsayan sistem modelinin birden fazla zaman gecikmesi altında kontrolünü içeren bir problemdir. Çalışmada İHA'ların dinamik denklemleri doğrusallaştırılmış ve dağıtılmış geri besleme kontrolörleri kullanılmıştır. Kararlılık analizi için *Karakteristik Köklerin Küme Davranışı*, (*Cluster Treatment of Characteristic Roots*) CTCR, yöntemi kullanılmıştır. Metodolojinin iki ana adımı vardır. İlk olarak, sistem için olası sanal eksen üzerindeki karakteristik köklerin tam portresini tanımlayan *Kernel* ve *Offspring* eğrilerini belirlenir. Daha sonra, sanal eksenin uygun bölgeleri boyunca kök geçiş eğilimlerinin değişmezlik özelliği kullanılarak sistemin kesin kararlılık bölgeleri tanımlanır [8–10]. Çalışmada haberleşme ve giriş gecikmesi altında formasyon oluşturan çoklu İHA sistemi incelenmiştir. İstemilen formasyonun kütle merkezinde buluna bir sanal lider İHA tanımlanmış ve bu sanal liderin yörüngesi formasyon grubunun yörüngesi olarak kabul edilmiştir. Bezout matrisine dayalı CTCR metodolojisi kullanılarak gecikme uzayındaki tüm kararlılık bölgeleri belirlenmiştir. Benzetim çalışmaları ile teorik sonuçlar desteklenmiştir.

Çalışma şu şekilde düzenlenmiştir: Bölüm 2'de çoklu İHA sistemi modeli verilmiştir. Bölüm 3'te sistemin kararlılık analizi yapılmıştır. Bölüm 4'te teorik çalışmaları destekleyen benzetim çalışmalarına yer verilmiş, son bölümde çalışma değerlendirilmiştir.

2. Sistem Modeli

2.1. Kinematik İHA Modeli

Bu çalışmada N adet otonom İHA'dan oluşan bir grup sistem ele alınmış ve İHA'ların eş zamanlı davranışını modellemek için nokta-kütleli uçak modeli kullanılmıştır [11, 12]. Uçak üzerine etki eden kuvvetler ve değişkenler Şekil 1'de gösterilmiştir;



Şekil 1: İHA üzerine etkiyen kuvvetler ve değişkenler

Düz dünya modeli yaklaşımı altında, yakıt tüketimi ve rüzgar ihmal edilmiş (itki yer hızı vektörü yönünde) ve uçağın her zaman koordineli manevralar gerçekleştirdiği varsayılmıştır. Hücum açısı (angle of attack, α) ve kayma açısı (angle of

sideslip, β) yaklaşık olarak sıfır kabul edilmiştir. Bu durumda yunuslama (θ) ve tırmanma (γ) açılarıyla, rota (course angle, χ) ve sapma (ψ) açılarının birbirine eşit olduğu kabul edilir. Bu koşullar altında i . İHA'nın kinematik modeli aşağıdaki gibidir;

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= V_i \cos \theta_i \cos \psi_i \\ \dot{y}_i &= V_i \cos \theta_i \sin \psi_i \\ \dot{z}_i &= V_i \sin \theta_i \\ \dot{V}_i &= \frac{1}{\tau_v} (V_{r_i} - V_i) \\ \dot{\theta}_i &= \frac{1}{\tau_\theta} (\theta_{r_i} - \theta_i) \\ \dot{\psi}_i &= \frac{1}{\tau_\psi} (\psi_{r_i} - \psi_i) \end{aligned} \quad (1)$$

Burada $i = \{0, 1, 2, \dots, N\}$, N formasyondaki İHA sayısı olmak üzere, x_i ve y_i sırasıyla, i . aracın sabit referans koordinat sistemine göre kuzey ve doğu yönlerindeki pozisyonu, z_i irtifasını, V_i uçuş hızını, θ_i and ψ_i Euler pitch (yunuslama) ve yaw (sapma, baş açısı) açılarını temsil etmektedir. Otopilot sisteminin hava aracının hızını, yunuslama ve sapma açılarını kontrol ettiği koşul altında V_{r_i} , θ_{r_i} ve ψ_{r_i} ifadeleri sırasıyla hava aracı hız, yunuslama ve sapma döngülerinin kontrol işaretleri, τ_v , τ_θ , τ_ψ ise bu döngülerin zaman sabitlerini ifade etmektedir.

Denklem 1'de verilen doğrusal olmayan nokta-kütleli kinematik İHA modeli geribeslemeli doğrusallaştırma yöntemi ile doğrusal zamanla değişmeyen (LTI) çift integratör (*double-integrator*) sistem formuna dönüştürülebilir. Bu işlem için 1'deki ilk üç denklemin (\dot{x}_i , \dot{y}_i , \dot{z}_i) bir kez türevi alınır ve sonrasında elde edilen ifadeler son üç denklemde (\dot{V}_i , $\dot{\theta}_i$ ve $\dot{\psi}_i$) yerine yazılır. Bu durumda i . araç için yeni kontrol sinyalleri $u_i = [u_{x_i} u_{y_i} u_{z_i}]^T$ olarak seçilirse, bu sinyallerin gerçek kontrol işaretleri ile ilişkisi aşağıdaki denklemdeki gibi ifade edilir.

$$\begin{aligned} \psi_{r_i} &= \tau_\psi (-u_{x_i} \sin \psi_i + u_{y_i} \cos \psi_i) / (v_i \cos \theta_i) + \psi_i \\ \theta_{r_i} &= \tau_\theta (-u_{x_i} \cos \psi_i \sin \theta_i - u_{y_i} \sin \psi_i \sin \theta_i + \\ &\quad u_{z_i} \cos \theta_i) / v_i + \theta_i \\ V_{r_i} &= \tau_v (u_{x_i} \cos \psi_i \cos \theta_i + u_{y_i} \sin \psi_i \cos \theta_i + \\ &\quad u_{z_i} \sin \theta_i) + V_i \end{aligned} \quad (2)$$

Bu bilgiler ışığında i . İHA için indirgenmiş çift integratör modeli aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} \dot{p}_i(t) &= v_i(t) \\ \dot{v}_i(t) &= u_i(t) \end{aligned} \quad (3)$$

Burada, $p_i = [x_i y_i z_i]^T \in R^3$, $v_i = [\dot{x}_i \dot{y}_i \dot{z}_i]^T \in R^3$ ve $u_i = [u_{x_i} u_{y_i} u_{z_i}]^T \in R^3$ sırasıyla konum, hız ve kontrol işaretini ifade etmektedir. Buna göre i . İHA için durum ve giriş matrisleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes I_3, \quad B_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes I_3 \quad (4)$$

2.2. Çizgi Teorisi

Hava araçları arasındaki veri akışı için yönlendirilmiş grafikler kullanılmıştır. Yönlendirilmiş grafikler düğümler ve düğümleri birleştiren kenarlardan oluşur. İHA'ların formasyon uçuşu

için oluşturulmuş bir $\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{E})$ yönlendirilmiş grafiğinde $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, \dots, v_N\}$ formasyon içindeki İHA'ları temsil eden düğümler kümesini, $\mathcal{E} \subseteq v \times v$ de İHA'lar arasındaki veri akışını simgeleyen kenarlar kümesi olarak tanımlanmaktadır.

Yönlendirilmiş grafiklerde veri akışını modellemek için kullanılan Komşuluk matrisi, Derece matrisi, Laplacian matrisi, Sabitleme matrisi ve Veri Topoloji simatrisi aşağıda tanımlanmıştır;

- *Komşuluk (Adjacency) matrisi:* $\mathcal{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{N \times N}$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{eğer } (v_i, v_j) \in \mathcal{E} \\ 0 & \text{aksi halde} \end{cases} \quad (5)$$

Burada $(v_i, v_j) \in \mathcal{E}$ ifadesi i . İHA'nın j . İHA'dan bilgi aldığı anlamına gelmektedir. Eğer i . İHA j . İHA'dan bilgi almıyorsa, komşuluk matrisinin ilgili elemanı 1, almıyorsa 0 olmaktadır. Ayrıca herhangi bir İHA kendisine bağlayan bir kenarın (çevrimin) olmadığı ($a_{ii} = 0, \forall i \in N$ varsayılmıştır).

- *Derece (Degree) matrisi:* $\mathcal{D} = \text{diag}\{d_{ii}\} \in \mathbb{R}^{N \times N}$

$$d_{ii} = \sum_{k=1}^N a_{ik} \quad (6)$$

Burada d_{ii} , i . aracın haberleştiği İHA sayısıdır.

- *Laplacian matrisi:* $\mathcal{L} = [l_{ij}] \in \mathbb{R}^{N \times N}$

$$\mathcal{L} = \mathcal{D} - \mathcal{A} \quad (7)$$

Laplacian matrisi komşuluk matrisi ve derece matrisi kullanılarak elde edilmekte olup ağ tabanlı sistemlerin modellenmesinde önemli rol oynar.

- *Sabitleme (Pinning) matrisi:* $\mathcal{P} = \text{diag}\{p_{ii}\} \in \mathbb{R}^{N \times N}$

$$p_{ii} = \begin{cases} 1 & \text{eğer } i. \text{ araç lider araç (0. araç) ile haberleşiyorsa} \\ 0 & \text{aksi halde} \end{cases} \quad (8)$$

Sabitleme matrisi, lider İHA'dan formasyon içindeki diğer İHA'lara veri akışı olup olmadığını tanımlar.

- *Veri Topolojisi (Informatin topology) matrisi:*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_p &= \mathcal{L} + \mathcal{P} \\ \mathcal{D}_p &= \mathcal{D} + \mathcal{P} \end{aligned} \quad (9)$$

Veri akış topolojisi matrisi Laplacian matrisi ve sabitleme matrisi kullanılarak elde edilmekte olup zaman gecikmesi altındaki İHA'ların formasyon uçuşunun modellenmesi için kullanılır.

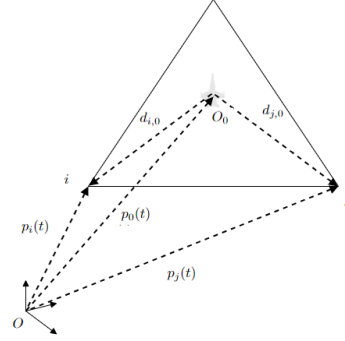
2.3. İHA'ların Formasyon Modeli

Formasyonun kütle merkezinde sanal bir lider bulunan formasyon uçuşlarının kontrol teorisi açısından amacı, belirli bir veri akışı topolojisi altında bilgi alış verişinde bulunan İHA'ların; lider İHA ile aynı hızda hareket etmesini sağlayıp, İHA'lar arasındaki mesafeyi belirlenen bir mesafe prensibine göre korumak şeklinde açıklanabilir. Buna göre i . İHA için kontrolörün amacı aşağıdaki gibi basit bir şekilde ifade edilebilir.

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \|p_i(t) - p_0(t) + d_{i,0}\| &= 0 \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \|v_i(t) - v_0(t)\| &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

Burada $d_{i,0}$ formasyon yapısını ifade etmektedir. Bu çalışma kapsamında sabit formasyon yapısı kullanılmış, yani lider İHA ile i . İHA arasındaki mesafe sabit bir değer olarak ele alınmıştır. Başka bir deyişle uçuş boyunca formasyon mimarisi sabit kalmaktadır.

Denklem (10) ile verilen kontrol hedefini sağlayan kontrolcü mimarisini oluşturmak ve anlaşılmasını kolaylaştırmak için Şekil 2'de bir model dönüşümü gösterilmiştir. Burada O



Şekil 2: Üçgen formasyon örneği

sabit (flat-earth, fixed) koordinat sisteminin merkezini, O_0 formasyon kütle merkezini (sanal lider İHA'nın konumu), $p_i(t)$, $p_j(t)$ ve $p_0(t)$ sırasıyla i . ve j . ve sanal lider İHA'nın sabit koordinat sistemine göre konumlarını ifade etmektedir. $d_{i,0}$ ve $d_{j,0}$ ise i . ve j . İHA'nın sanal lider arasındaki mesafedir. Bu durumda i . İHA için kontrolcü yapısı (10) denklemini de içerecek en geniş şekliyle aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned} u_i(t) &= - \sum_{j=1}^N a_{ij} \left[k_p \left((p_i(t) - p_0(t) + d_{i,0}) - (p_j(t) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - p_0(t) + d_{j,0}) \right) + k_v \left((v_i(t) - v_0(t)) - (v_j(t) - v_0(t)) \right) \right] - \\ &\quad p_{ii} \left[k_p \left(p_i(t) - p_0(t) + d_{i,0} \right) + k_v \left(v_i(t) - v_0(t) \right) \right] \end{aligned} \quad (11)$$

Burada $p_i = [x_i \ y_i \ z_i]^T \in \mathbb{R}^3$ ve $v_i = [v_{x_i} \ v_{y_i} \ v_{z_i}]^T \in \mathbb{R}^3$ i . İHA'nın sabit koordinat sistemine göre üç ekseninde konumlarını ve hızlarını ifade etmektedir. Sanal lider aracın bilgileri 0 indeksi ile gösterilmiştir. a_{ij} ve p_{ii} sırasıyla Komşuluk ve Sabitleme matrislerinin ilgili elemanlarına karşılık gelmekte, k_p ve k_v konum ve hız kontrolcü kazançlarını ifade etmektedir.

Sanal lider araç ve i . araç arasındaki konum ve hız hataları aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$\begin{aligned} e_{p_i}(t) &= p_i(t) - p_0(t) - d_{i,0} \\ e_{v_i}(t) &= v_i(t) - v_0(t) \end{aligned} \quad (12)$$

Bu durumda (11) ile verilen kontrolcü yapısı (12) ile ifade edilen konum ve hız hataları cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned} u_i(t) &= - \sum_{j=1}^N a_{ij} \left[k_p \left(e_{p_i}(t) - e_{p_j}(t) \right) + k_v \left(e_{v_i}(t) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - e_{v_j}(t) \right) \right] - p_{ii} \left[k_p e_{p_i}(t) + k_v e_{v_i}(t) \right] \end{aligned} \quad (13)$$

İHA sistemlerinin formasyon uçuşunda zaman gecikmesini incelemek için bu çalışma kapsamında haberleşme ve giriş gecikmeleri altında İHA'ların formasyon uçuşunun kararlılık ve performansı incelenmiştir. Haberleşme gecikmesi (τ_{com}) altında her İHA komşusundan durum bilgisini gecikmeli alır. Giriş gecikmesi (τ_{in}) ise İHA'ların kendi durumları da dahil olmak üzere tüm durum geri besleme hatlarını etkileyen gecikmedir. Bu durumda haberleşme ve iletişim gecikmesi altında sistemin kontrol işareti aşağıdaki gibi yazılmaktadır ($\tau_1 = \tau_{in}$, $\tau_2 = \tau_{in} + \tau_{com}$).

$$u_i(t - \tau) = - \sum_{j=1}^N a_{ij} \left[k_p (e_{p_i}(t - \tau_1) - e_{p_j}(t - \tau_2)) + k_v (e_{v_i}(t - \tau_1) - e_{v_j}(t - \tau_2)) \right] - p_{ii} \left[k_p e_{p_i}(t - \tau_1) + k_v e_{v_i}(t - \tau_1) \right] \quad (14)$$

3. Kararlılık Analizi

Yukarıda verilen bilgiler ışığında sistemin hata dinamikleri (15) ile elde edilir.

$$\begin{aligned} \dot{e}_{p_i}(t) &= e_{v_i}(t) \\ \dot{e}_{v_i}(t) &= u_i(t) \end{aligned} \quad (15)$$

Notasyonu kolaylaştırmak için (16) ile verilen vektör tanımları kullanılmıştır.

$$\begin{aligned} E(t) &= [e_{p_1}(t) \ e_{v_1}(t) \ e_{p_2}(t) \ e_{v_2}(t) \ \dots \ e_{p_N}(t) \ e_{v_N}(t)]^T \\ U(t) &= [u_1(t) \ u_2(t) \ \dots \ u_N(t)]^T \\ K_p &= \text{diag}[k_p; k_p; k_p], \quad K_v = \text{diag}[k_v; k_v; k_v] \\ K &= [K_p \ K_v] \end{aligned} \quad (16)$$

Sonuç olarak, (14) ile verilen kontrol sinyali (15) denkleminde yerine yazılır ve (16)'daki vektör tanımları yardımıyla yeniden düzenlenirse N tane İHA'dan oluşan formasyon kontrol sisteminin hata dinamiği üzerinden tanımlanan doğrusal zamanla değişmeyen kapalı çevrim durum uzayı modeli (17) ile elde edilir.

$$\dot{E}(t) = (I_N \otimes A)E(t) + (\mathcal{D}_p \otimes BK)E(t - \tau_1) + (\mathcal{A} \otimes BK)E(t - \tau_2) \quad (17)$$

Burada, \otimes Kronecker çarpımı ifade etmekte, \mathcal{A} Komşuluk matrisine, \mathcal{D}_p de Veri Topolojisi matrisine karşılık gelmektedir. $I_N \in R^{N \times N}$ birim matristir, A ve B (4) ile verilen sistem matrisleridir.

Bilindiği üzere doğrusal zamanla değişmeyen bir sistem ancak ve ancak sistem matrisinin tüm özdeğerleri sol yarı düzlemde ise kararlıdır. Bununla birlikte sistemde zaman gecikmesi olduğu durumda kapalı çevrim sistemin karakteristik denkleminin sonsuz sayıda kökü bulunmaktadır. Bu köklerin hepsini izlemek mümkün olmayacağından farklı yöntemlere ihtiyaç duyulmaktadır.

Bu çalışmada, kararlılık bölgesini elde etmek için CTCR metodu kullanılmıştır. CTCR, zaman gecikmesine bağlı olarak sanal eksen üzerindeki kökleri bulan ve bu köklerin karmaşık düzlemdeki kararlılık geçişlerini inceleyen frekans temelli bir

yaklaşımdır. Bu yaklaşımla sadece sınırlı sayıda kökün hesaplanması ile gecikme uzayındaki kesin kararlılık sınırları elde edilebilir.

CTCR metodunun teorik altyapısı ve çoklu zaman gecikmesi içeren formasyon kontrol sistemlerine Bezout matrisi yardımıyla nasıl uygulanacağı aşağıda anlatılmıştır. Doğrusal zamanla değişmeyen iki zaman gecikmeli bir sistem ve bu sisteme ait karakteristik denklem sırasıyla (18) ve (19) ile ifade edilebilir.

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + B_1x(t - \tau_1) + B_2x(t - \tau_2) \quad (18)$$

$$\Delta(s; \tau_1, \tau_2) = \det [sI - A_0 - B_1e^{-s\tau_1} - B_2e^{-s\tau_2}] = 0 \quad (19)$$

(18) sistemi (17)'da verilen sistem üzerinden değerlendirildiğinde A_0 , B_1 ve B_2 matrisleri aşağıdaki gibi olur.

$$\begin{aligned} A_0 &= I_N \otimes A \\ B_1 &= -(\mathcal{D}_p \otimes BK) \\ B_2 &= \mathcal{A} \otimes BK \end{aligned} \quad (20)$$

Bu sistemin zaman gecikmesine göre kararlılık durumundaki bir değişiklik, yalnızca belirli τ gecikme değerleri için, sistemin $s = j\omega_c$ 'da bir kök çifti olduğu zaman mümkündür. Zaman gecikmesindeki sonsuz küçük bir değişim ile sanal eksen üzerindeki köklerin karmaşık düzlemin sağına ya da soluna geçişinin tespiti ile sistemin kararlılık durumu belirlenebilir. CTCR yaklaşımının temelinde bu fikri esas alan üç temel tanım ve iki öneri yer almaktadır.

Tanım 1 . Kernel eğrileri : $s = j\omega_c$ iken (19) denklemini çözen tüm ω_c değerleri için $0 < \tau\omega_c < 2\pi$ kısıtını sağlayan $\{\tau\} = (\tau_1, \tau_2)$ uzayı *Kernel* eğrilerini oluşturur. Bunlar ω_c frekansında sanal eksen üzerindeki kökleri oluşturan en küçük gecikme değerleridir.

Tanım 2 . Offspring eğrileri : $\tau_1 = \tau_1 + 2k\pi/\omega_c$ ve $\tau_2 = \tau_2 + 2k\pi/\omega_c$, $k = 1, 2, \dots$ kullanılarak *Kernel* eğrilerinden elde edilen tüm eğrilerdir.

Tanım 3 . Kök yönelimi : *Kernel* ve *Offspring* üzerinde herhangi bir noktada gecikmenin sonsuz küçük bir değişimi sanal eksende kök geçişine neden olur. Kök yönelimi, zaman gecikmelerinden yalnızca biri $0 < \epsilon \ll 0$ için ϵ kadar artarken (diğeri sabit kaldığında) sanal eksen üzerindeki köklerin geçiş yönünü ifade eder. Böyle bir geçiş, karmaşık düzlemin sağına veya soluna olabilir. Kök yönelimi -1 ise kök geçişi kararsız bölgeye, 1 ise kararlı bölgeye olur.

$$RT \Big|_{s=\omega_c i}^{\tau_j} = \text{sgn} \left[\text{Re} \left(\frac{ds}{d\tau_j} \Big|_{s=\omega_c i} \right) \right] \quad (21)$$

Öneri 1 : Bir LTI-MTDS, yalnızca sonlu sayıda (m) *Kernel* eğrisi sergileyebilir. Bu sayı, sistem derecesinin karesi ile üstten sınırlıdır ($m < n^2$).

Öneri 2: *Kernel* ve *Offspring* eğrilerindeki sonsuz sayıdaki noktalardan herhangi birinin neden olduğu sanal bir karakteristik kök, $s = j\omega_c$, alındığında bu sanal köklerin kök yönelimi, *Offspring* noktaları aynı noktadaki *Kernel*'den elde edildiği sürece değişmez. Yani, τ 'nun varyasyonlarına göre kök eğilimi, *Kernel*'den ona karşılık gelen *Offspring*, $\tau = \tau + 2k\pi/\omega_c$ kadar değişmezdir.

(18) ile verilen sistemin kararlılık durumunu değiştirebilecek tüm $\{\tau\} = (\tau_1, \tau_2)$ noktaları, *Kernel* ve *Offspring* setleri içinde yer almaktadır. Dolayısı ile bu setleri elde etmek CTCR metodunun başlangıç noktasını oluşturmaktadır.

(19) karakteristik denklemi üstel terimleri ortadan kaldıracak şekilde $z_1 = e^{-s\tau_1}$ ve $z_2 = e^{-s\tau_2}$ dönüşümleri ile aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\Delta_1(s; z_1, z_2) = \det [sI - A_0 - B_1 z_1 - B_2 z_2] = 0 \quad (22)$$

A , B_1 ve B_2 matrisleri $R^{n \times n}$ 'de sabit matrisler olduğundan s , z_1 ve z_2 değişkenlerinin kompleks eşlenikleri de (22) denklemini sağlayacaktır. $s^* = -j\omega$, $z_1^* = z_1^{-1}$ ve $z_2^* = z_2^{-1}$ olmak üzere karakteristik denklem aşağıdaki şekilde yeniden yazılabilir.

$$\Delta_2(s^*; z_1^*, z_2^*) = \det [s^*I - A_0 - B_1 z_1^* - B_2 z_2^*] = 0 \quad (23)$$

(19) karakteristik denklemini sağlayan $s = j\omega$ çözümü aynı zamanda Δ_1 ve Δ_2 denklemlerini de sağlayacaktır. Bu durumda *Kernel* ve *Offspring* eğrilerini bulma problemi Δ_1 ve Δ_2 polinomlarının ortak köklerini elde etme problemine dönüşmüş olur. Bu çalışmada iki polinomun ortak köklerini bulmak için Bezout matrisi kullanılmıştır. N tane İHA'dan oluşan formasyon uçuş sistemine Bezout matrisine dayalı CTCR yöntemi ile kararlılık analizini uygulamak için aşağıdaki adımlar izlenir.

1. (22) ve (23)'de verilen Δ_1 ve Δ_2 karakteristik denklemleri aşağıdaki gibi yeniden düzenlenir;

$$\begin{aligned} \Delta_1(s; z_1, z_2) &= \sum_{i=0}^{6 \times N} f_i(z_1, z_2) s^i \\ \Delta_2(s; z_1, z_2) &= \sum_{i=0}^{6 \times N} g_i(z_1, z_2) s^i \end{aligned} \quad (24)$$

2. Aşağıdaki şekilde Bezout matrisini oluştur.

$$\begin{aligned} B(\Delta_1, \Delta_2, s) &= b_{i,j=1,\dots,N}, \\ b_{N-i+1,j} &= \text{Coeff} \left(\left(\sum_{r=i}^N g_{N-r} s^{N-r} \right) \right. \\ &\quad \left. \left(\sum_{r=i}^i f_{N-r+1} s^{i-r} \right) - \left(\sum_{r=i}^N f_{N-r} s^{N-r} \right) \right. \\ &\quad \left. \left(\sum_{r=i}^i g_{N-r+1} s^{i-r} \right), s, N-j \right), \quad i, j = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (25)$$

3. Bezout matrisinin determinantını hesaplanır.

$$D(z_1, z_2) = \det(B(\Delta_1, \Delta_2)) = 0 \quad (26)$$

(22) ve (23) denklemlerinin ortak çözümü varsa, (25) matrisi tekildir. Başka bir deyişle (25) matrisinin tekliği (22) ve (23) denklemlerinin ortak çözümü olmasının gerek koşuludur.

4. $\theta \in [0, 2\pi]$ olmak üzere $z_{1(2)} = e^{j\theta}$ ve $\theta = \theta_0 + \delta\theta$ için (26) denklemini çözülür. Birim uzunluğuna sahip köklere karşılık gelen $z_{2(1)}$ değerlerini belirlenir.

Not: $\delta\theta$ istenen tarama çözünürlüğüne göre belirlenen küçük bir değerdir. İlk iterasyonda $\theta_0 = 0$ alınır.

5. Bulunan z_1 ve z_2 değerlerini (22) ve (23) denklemlerinde yerine koyulur ve denklemlerde $s = j\omega$ için denklemleri çözen ω değerlerini bulur. Bu değerler (19) denkleminin sanal eksen üzerindeki köklerine denk gelmektedir.

6. Aşağıdaki eşitliği kullanarak 5. adımda bulunan ω değerlerine karşılık gelen τ_1, τ_2 değerlerini bulunur. Burada $k = 0$ iken *Kernel*, $k > 0$ iken *Offspring* eğrileri üzerindeki $\{\tau\} = (\tau_1, \tau_2)$ noktaları elde edilir.

$$\tau_{jk} = \frac{\arg(z_j) \mp 2k\pi}{\omega}, \quad j = 1, 2. \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (27)$$

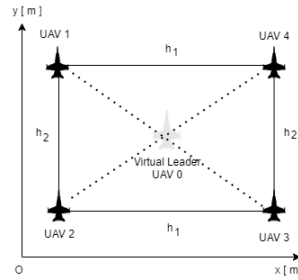
7. $\theta < 2\pi$ ise $\theta_0 = \theta$ eşitliği ile hesaplama yapılacak θ 'yı belirlenen $\delta\theta$ kadar arttırıp 4. arasındaki adıma dönülür. $\theta = 2\pi$ olduğunda hesaplama sonlandırılır.

Burada, zaman gecikmelerine göre CTCR ile kök davranışını incelemek için kontrolör katsayıları da dahil olmak üzere diğer tüm sabitlerin önceden tanımlanması gerekmektedir. Kontrolör katsayıları zaman gecikmesiz durumda sistemi kararlı yapacak şekilde seçilmelidir.

CTCR metodu sistemleri tekli veya çoklu zaman gecikmelerine karşı analiz etmek için pratik ve sayısal olarak verimlidir. Ancak takımdaki takip eden araç sayısı artarsa, kapalı çevrim matrislerinin boyutları önemli ölçüde arttığı için bu teknik daha fazla hesaplama kaynağına ihtiyaç duyar.

4. Benzetim Çalışmaları

Önceki bölümde anlatılan teorik bilgileri desteklemek amacıyla nümerik benzetim çalışmaları yürütülmüştür. 4 tane İHA'nın dikdörtgen bir formasyon oluşturduğu ve kütle merkezinde sanal lider İHA bulunduğu formasyon uçuş kontrol sistemi ve veri akış topolojisi Şekil 3 ile gösterilmiştir.



Şekil 3: Dikdörtgen formasyon ve veri akışı topolojisi

Bu topolojiye karşılık gelen Komşuluk ve Veri Topolojisi matrisleri (28) ile verilmiştir. Ayrıca her İHA, lider İHA ile veri alışverişinde bulunmaktadır.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{D}_p = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (28)$$

Formasyon uçuş sistemin homojen olduğu yani formasyon içindeki tüm İHA'ların aynı dinamik modele sahip olduğu varsayımı altında benzetim çalışmalarında kullanılan sistem parametreleri ve İHA'lar için başlangıç değerleri sırasıyla Tablo 1 ve Tablo 2'de verilmiştir.

Tablo 1: Sistem parametreleri

Sembol	Tanım	Değer	Birim
N	Takipçi İHA sayısı	4	-
h_1, h_2	Sabit mesafeler	700, 600	[m]
τ_v	Hız zaman sabiti	1.8	[s]
τ_θ	Yunuslama zaman sabiti	0.6	[s]
τ_ψ	Sapma zaman sabiti	0.5	[s]

Tablo 2: İHA'lar için başlangıç değerleri

x_i [m]	y_i [m]	z_i [m]	v_i [m/s]	ψ_i [°]	θ_i [°]
UAV ₀	350	350	40	30	5
UAV ₁	0	700	65	-10	3
UAV ₂	0	0	55	10	4
UAV ₃	700	0	30	15	6
UAV ₄	700	700	35	-15	-5

Sanal lider İHA'nın takip etmesi istenilen referans hız, yunuslama açısı ve sapma açıları profili aşağıda verilmiştir.

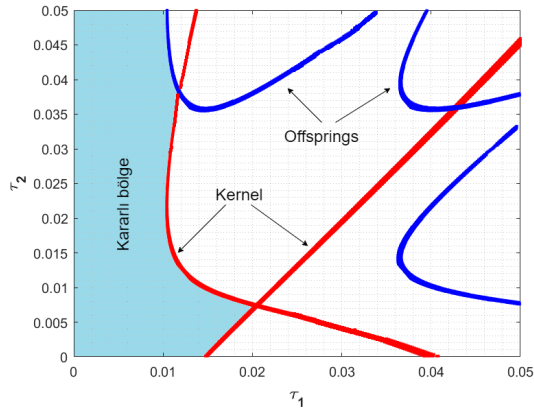
$$v_{ref} = 50m/s, \quad \theta_{ref} = 5^\circ$$

$$\psi_{ref} = \begin{cases} 0^\circ, & t \leq 40 \\ 10^\circ, & 40 < t \leq 80 \\ 0^\circ, & 80 < t \leq 120 \\ -5^\circ, & 120 < t \leq 150 \\ 0^\circ, & t \leq 200 \end{cases} \quad (29)$$

Zaman gecikmesi olmayan durumda kapalı çevrim sistemi kararlı hale getiren denetleyici parametreleri aşağıdaki gibi seçilmiştir.

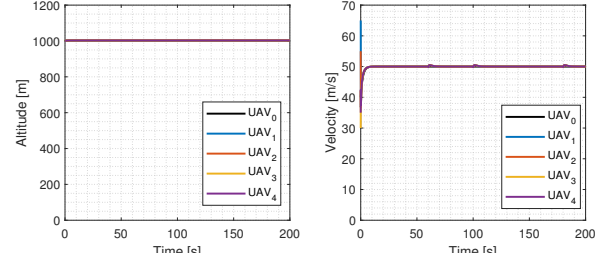
$$K = [kp \quad kv] = [6.2806 \quad 25.4619] \quad (30)$$

Bir önceki bölümde verilen adımlar uygulanarak gecikmelere bağlı kararlılık haritası Şekil 4'deki gibi elde edilmiştir.

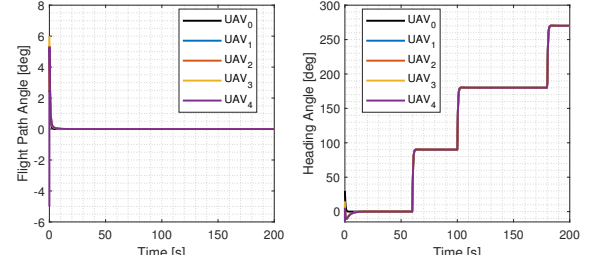


Şekil 4: $k_p = 6.2806$, $k_v = 25.4619$ değerleri için $(\tau_1 - \tau_2)$ kararlılık bölgesi

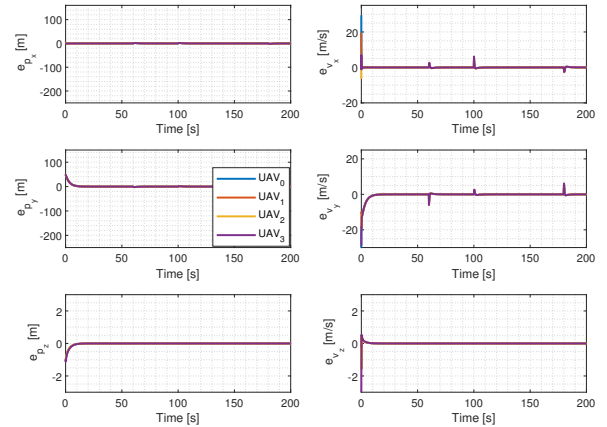
Zaman gecikmelerinden kaynaklanan kararsızlık, zaman gecikmesi çiftinin $(\tau_1 - \tau_2)$ taralı bölgenin dışına çıktığı değerlerde meydana gelir. Kararlılık haritası üzerinde kararlı bölgede olan $\tau_1 = 0.01s$ ve $\tau_2 = 0.01s$ için irtifa, hız, yunuslama açısı, sapma açısı, üç eksende konum ve hız hataları sırasıyla Şekil 5, 6 ve 7 ile verilmiştir. İHA'ların üç boyutlu formasyon yörüngesi ise Şekil 8 ile verilmiştir.



Şekil 5: $\tau_1 = 0.01s$ ve $\tau_2 = 0.01s$ için irtifa ve hız



Şekil 6: $\tau_1 = 0.01s$ ve $\tau_2 = 0.01s$ yunuslama ve sapma açıları

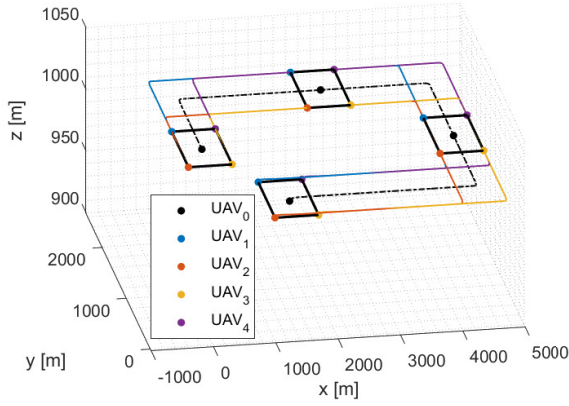


Şekil 7: $\tau_1 = 0.01s$ ve $\tau_2 = 0.01s$ pozisyon ve hız hataları

Test noktaları kararlılık sınırında olan $\tau_1 = 0.01s$ ve $\tau_2 = 0.01916s$ olarak seçilirse yunuslama ve sapma açılarının değerleri Şekil 9'daki gibi olur. Sonuçlar beklendiği üzere sistem marjinal kararlı olmaktadır. Daha sonra test noktası kararsız bölgede olan $\tau_1 = 0.01s$ ve $\tau_2 = 0.02s$ olarak seçilir. Sonuçlar 10 ile verilmiştir. Bu durumda, sistemin karakteristik denkleminin köklerinden en az bir çifti karmaşık düzlemin sağ yarısında yer aldığından sistem kararsız davranış göstermiştir.

5. Sonuçlar

Bu çalışmada çoklu İHA sisteminin haberleşme ve giriş gecikmeleri altında formasyon kontrolünün iç kararlılığı incelenmiştir. Hava araçlarının doğrusal olmayan modeli geribeslemeli doğrusallaştırma metodu ile doğrusallaştırılarak çift integratör dinamiğine sahip doğrusal zamanla değişmeyen denklemlerle modellenmiştir. İHA'lar arasındaki haberleşme topolojisini modellemek için çizgi teorisi kullanılmıştır. Hava araçlarının iste-

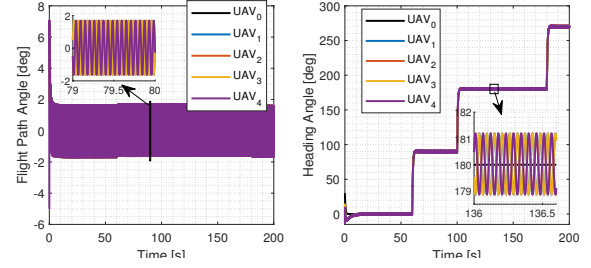


Şekil 8: Üç boyutlu formasyon yörüngesi

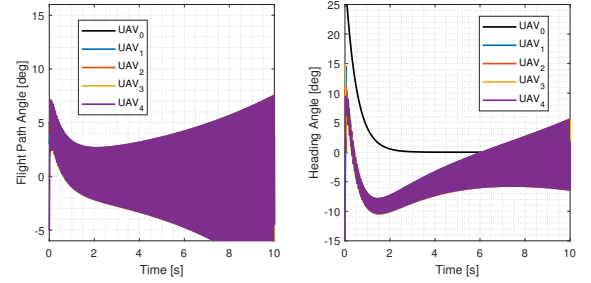
nilen formasyonu oluşturması ve takip etmesi için durum geri besleme kontrolcüsü kullanılmıştır. Zaman gecikmesi altında sistemin kapalı çevrim durum uzay modeli elde edilmiş ve Bezout matrisine dayalı CTCR metodu ile kararlılık analizi yapılmıştır. 4 İHA'nın karesel formasyonu koruyarak, formasyon kütle merkezinde yer alan sanal lider İHA'nın referans yörüngesi doğrultusunda hız, yunuslama ve sapma açısı ile formasyon uçuş kontrolüne yönelik benzetim çalışması yapılmıştır. Doğrusallaştırılmış model üzerinden zaman gecikmelerine bağlı kararlılık haritası elde edilmiştir. Yapılan kararlılık analizinin başarımı benzetim çalışmaları ile desteklenmiştir.

6. Kaynakça

- [1] Yusuf Kartal, Kamesh Subbarao, Nicholas R Gans, Atilla Dogan, and Frank Lewis, "Distributed backstepping based control of multiple uav formation flight subject to time delays," *IET Control Theory & Applications*, vol. 14, no. 12, pp. 1628–1638, 2020.
- [2] Tianyi Xiong, Zhiqiang Pu, and Jianqiang Yi, "Time-varying formation finite-time tracking control for multi-uav systems under jointly connected topologies," *International Journal of Intelligent Computing and Cybernetics*, vol. 10, no. 4, pp. 478–490, 2017.
- [3] Ruibin Xue and Gaohua Cai, "Formation flight control of multi-uav system with communication constraints," *Journal of aerospace technology and management*, vol. 8, pp. 203–210, 2016.
- [4] Xiwang Dong, Yan Zhou, Zhang Ren, and Yisheng Zhong, "Time-varying formation control for unmanned aerial vehicles with switching interaction topologies," *Control Engineering Practice*, vol. 46, pp. 26–36, 2016.
- [5] Wei Xiao, Jianglong Yu, Rui Wang, Xiwang Dong, Qingdong Li, and Zhang Ren, "Time-varying formation control for time-delayed multi-agent systems with general linear dynamics and switching topologies," *Unmanned Systems*, vol. 7, no. 01, pp. 3–13, 2019.
- [6] Georgios P Kladis, "Stabilisation and tracking for swarm-based uav missions subject to time-delay," *Applications of Mathematics and Informatics in Science and Engineering*, pp. 265–288, 2014.



Şekil 9: $\tau_1 = 0.01s$ ve $\tau_2 = 0.01916s$ için yunuslama ve sapma açıları



Şekil 10: $\tau_1 = 0.01s$ ve $\tau_2 = 0.02s$ için yunuslama ve sapma açıları

- [7] Abdelkader Abdessameud and Abdelhamid Tayebi, "Formation control of vtol unmanned aerial vehicles with communication delays," *Automatica*, vol. 47, no. 11, pp. 2383–2394, 2011.
- [8] Rifat Sipahi and Nejat Olgac, "Complete stability robustness of third-order lti multiple time-delay systems," *Automatica*, vol. 41, no. 8, pp. 1413–1422, 2005.
- [9] Ali Fuat Ergenc, Nejat Olgac, and Hassan Fazelinia, "Extended kronecker summation for cluster treatment of lti systems with multiple delays," *SIAM Journal on Control and Optimization*, vol. 46, no. 1, pp. 143–155, 2007.
- [10] Sirin Akkaya, Onur Akbati, and Ali Fuat Ergenc, "Stability analysis of connected vehicles with v2v communication and time delays: Ctr method via bézout's resultant," *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, vol. 43, no. 8, pp. 1802–1829, 2021.
- [11] Randal W Beard and Timothy W McLain, *Small unmanned aircraft: Theory and practice*, Princeton university press, 2012.
- [12] Jianan Wang, Chunyan Wang, Ming Xin, Zhengtao Ding, and Jiayuan Shan, *Cooperative Control of Multi-Agent Systems: An Optimal and Robust Perspective*, Academic Press, 2020.