

Negatif İmajiner Zaman Gecikmeli Sistemler Üzerine

On Negative Imaginary Time Delay Systems

A. Can Kutlucan¹, Baran Alikoç², Leyla Gören-Sümer¹

¹Kontrol ve Otomasyon Mühendisliği Bölümü
İstanbul Teknik Üniversitesi

kutlucan@itu.edu.tr, leyla.goren@itu.edu.tr

²Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümü
Bahçeşehir Üniversitesi

baran.alikoc@eng.bau.edu.tr

Özetçe

Bu çalışmada sürekli zamanlı lineer, zaman gecikmeli retarded ve neutral tip sistemlerin, Negatif İmajiner (NI) olmaları için gerek koşullar elde edilmiş ve özgün bir NI Lemma ile sunulmuştur. Lemma'da verilen gecikme bağımlı (delay-dependent) koşullar lineer matris eşitsizliğiyle (LMI) tanımlanmıştır. Lemma'nın uygulaması olarak, üzerinde eş konumlu piezoelektrik sensör ve eyleyici bulunan esnek saplı giriş sisteminde titreşim problemi ele alınmıştır. Giriş sisteminin, titreşim kontrolü zaman gecikmeli bir kontrolör ile yapılmıştır. Tüm sistemin kararlılığı için disipasyon temelli kararlılık teoreminin gerektirdiği analizler NI Lemma kullanılarak yapılmış ve kontrolörün, parametrelerin seçilen değerleri için NI olduğu bu sayede belirlenmiştir. Kapalı çevrimli sistemin kararlı olduğu, zaman bölgesinde elde edilen benzetim sonuçlarıyla gösterilmiştir böylece NI Lemma benzetim ile de doğrulanmıştır.

Abstract

In this paper, the necessary conditions for continuous-time linear, retarded and neutral delay systems are obtained to be Negative Imaginary (NI) and a novel NI Lemma is presented. The Lemma is defined by a linear matrix inequality (LMI) with delay-dependent conditions. As an application of the Lemma, the vibration problem of a flexible beam system with a collocated piezoelectric sensor and actuator is considered. The vibration of the beam system is controlled by a time-delayed controller. For the stability of the whole system, the analyses required by the dissipation-based stability theorem are performed using the NI Lemma and it is determined that the controller is NI for selected values of the parameters. The closed-loop system is shown to be stable by the simulation results obtained in the time domain, thus the NI Lemma is also verified by simulation.

1.Giriş

NI sistem teorisi, Pozitif Reel (PR) sistem teorisinin duali olarak [1] çalışmasında tanıtılmıştır. Motivasyonu, eş konumlu yerleştirilmiş sensörleri ve kuvvet eyleyicileri bulunan yüksek rezonanslı mekanik sistemlerin pozitif konum geri beslemesi (PPF) kontrol problemidir. Bilindiği gibi lineer zamanla

değişmeyen (LTI) sistemlerin pasif olma koşulu sistemin transfer fonksiyonunun PR olmasıdır. NI kuramı ile LTI sistemlerin dinamik pasif olma koşulu sistemin transfer fonksiyonunun NI olması olarak belirlenmiştir. Bu teori, saplı giriş, büyük uzay araçları, nanopozisyon sistemleri gibi esnek sistemlerin titreşim kontrol probleminin çözümünde, araç konvoylarının ya da hava araçlarının formasyon kontrol problemi gibi çok etmenli sistemlerde ortaya çıkan kontrol problemlerinin çözümü için de yaygın olarak kullanılır.

PR sistem kuramına göre iki PR sistem negatif geri besleme altında pasifliğini dolayısı ile de kararlılığını korur. NI sistem kuramına göre ise iki NI sistem pozitif geri besleme altında açık çevrim DC kazancının birden küçük olma koşulu altında dinamik pasifliğini dolayısı ile kararlılığını korur. Kararlılık analizinin bu kadar kolay yapılabilmesi, NI sistem kuramının kullanımını yaygınlaştırmıştır. Başlangıçta sonlu boyutlu, kararlı sistemler için geliştirilmesine rağmen, daha sonra kuram, imajiner kutupları olan sistemlere ve sonra da orijinde kutbu olan marjinal kararlı sistemlere genişletilmiştir [2]. Literatürde, NI ve pozitif reel (PR) sistemler arasındaki dönüşümler tartışılmıştır [3,4]. Bu dönüşümler, NI sistemleri ile disipatiflik arasındaki bağlantıları da ortaya koymuştur [5,6].

NI olma, dolayısıyla dinamik dissipatif olma, sistemin boyutundan bağımsız olarak sisteme uygulanan giriş ve sistemin çıkış işaretleri üzerinden tanımlanan özellikler olması nedeniyle, NI olma sonsuz boyutlu sistemlere genişletilebilmiştir. NI sistem kuramının uygulama alanının çok büyük bir bölümünü esnek sistemler sınıfı oluşturur ve bilindiği gibi bu sistemler sonsuz boyutludur. LTI olan ancak zaman gecikmesine sahip sistemlerin pasif olma koşulları Fridman'ın [7] çalışmasında oldukça genel olarak ele alınmış ve bir yeter koşul kümesi verilmiştir.

Bu çalışmada zaman gecikmeli retarded ve neutral tip LTI sistemlerin NI olma koşulları ele alınmış ve dinamik pasif olma yani NI olma koşulları elde edilmiş ve bir Lemma ile sunulmuştur. Böylece [8] çalışmasında dissipatiflik üzerinden tanımlanmış kararlılık teoreminin, sonsuz boyutlu bir NI sistem ile gecikmeli retarded NI özelliğinde olan LTI bir sistemin pozitif geri besleme altında kararlı olma koşulları da elde edilmiştir.

Bu çalışmada geliştirilen zaman gecikmeli retarded ve neutral tip sistemlerin LTI sistemlerin dinamik dissipatif olma yani NI

olma koşullarını veren Lemma'nın uygulaması olarak, üzerinde eş konumlu piezoelektrik sensör ve eyleyici bulunan esnek saplı kiriş (akıllı saplı kiriş) sonsuz boyutlu örnek sistem olarak seçilmiştir. Titreşim kontrolü amacıyla zaman gecikmesi içeren bir kontrolör seçilmiş ve pozitif geri besleme altında tüm sistemin kararlılığı bu çalışmada verilen Lemma kullanılarak analiz edilmiştir.

Bildirinin içeriği özet olarak şöyledir. Bölüm 2'de dissipatiflik kavramı ve bunun üzerinden NI sistem özellikleri tanımlanmış, Bölüm 3'te zaman gecikmeli neutral tip bir sistem için NI Lemma verilmiştir. Bölüm 4'te akıllı saplı kiriş sisteminde zaman gecikmeli bir kontrolörle titreşim sönümleme gerçekleştirilmiş ve Lemma'nın doğruluğu, uygulanabilirliği benzetim sonuçlarıyla da desteklenmiştir.

2. Ön Bilgiler

Bu bölümde LTI sistemlerin NI ve dissipatif olma tanımları ve bunlara ilişkin bir teorem sunulmuştur.

Sonlu boyutlu Lineer Zamanla Değişmeyen, transfer fonksiyonu $G(s)$ olan sistemin durum uzayı gösterilimi,

$$\Sigma = \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (1)$$

olsun, burada $x(t) \in R^n$ sistem durumları, $u(t) \in R^m$ sistem girişi ve $y(t) \in R^m$ sistem çıkışı vektörleridir.

Sistemin NI olabilmesi için $G(s)$ 'in sağlaması gereken özellikler frekans tanım bölgesinde Tanım 1-2'de verilmiştir.

Tanım 1 [1,5]: Eğer nedensel (proper), reel rasyonel transfer matrisi $G(s)$, NI ise,

1. $G(s)$ 'in $Re[s] > 0$ için kutbu olmamalıdır,
2. $G(s)$ 'in jw 'de kutbu yoksa $\omega > 0$ için, $j(G(jw) - G(jw)^*) \geq 0$ olmalıdır.
3. $G(s)$ 'in $s = jw$ ekseninde tek katlı karmaşık eşlenik kutupları varsa bu kutuplara ilişkin rezidü matrisi

$$\lim_{s \rightarrow jw} (s - jw)jG(s) = K$$

$\omega > 0$ için yarı-pozitif tanımlı Hermitian bir matris olmalıdır,

4. $G(s)$ 'in $s = 0$ da kutbu var ise $k \geq 3$ için $\lim_{s \rightarrow 0} s^k G(s) = 0$, $\lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)$ ise pozitif tanımlı Hermitian bir matris olmalıdır.

Tanım 2 [1,5]: Eğer nedensel reel rasyonel transfer matrisi $G(s)$ Kesin Negatif İmajiner (SNI) ise,

1. $G(s)$ 'in $Re[s] \geq 0$ için kutbu olmamalıdır,
2. $0 < w < \infty$ için $j[G(jw) - G(jw)^*] > 0$ olmalıdır.

Bu tanımlar rasyonel transfer fonksiyonları için geçerlidir. Zaman gecikmeli sistemler için NI olma tanımı zaman gecikmeli sistemler için PR olma tanımlarına benzer şekilde eşdeğer olarak dinamik dissipatif olma üzerinden yapılmalıdır. Bu nedenle aşağıda pasif olma, dissipatif olma ve dinamik dissipatif olma tanımları verilmiştir.

Tanım 3[3,4]: (1) denkleminde verilen Σ dinamik sistemi, katkı oranı $w(u(t), y(t))$ olmak üzere,

$$V(x(t)) \leq V(x(0)) + \int_0^T w(u(t), y(t)) dt \quad (2)$$

ilişkisini sağlayan $V(x): R^n \rightarrow R^+$ bir depo fonksiyonu varsa, dissipatiftir.

- **Pasiflik:** Eğer katkı oranı

$$w(u(t), y(t)) = y^T(t)u(t) \quad (3)$$

için (2) ilişkisini sağlayan $V(x): R^n \rightarrow R^+$ bir depo fonksiyonu varsa sistem pasiftir yani PR'dir.

Tanım 4 [8]: (1) denkleminde verilen Σ dinamik sistemi, $D = 0$ için

$$V(x(t)) \leq V(x(0)) + \int_0^T u(s)^T \dot{y}(s) ds \quad (4)$$

ilişkisini sağlayan $V(x): R^n \rightarrow R^+$ bir depo fonksiyonu varsa, dinamik pasif yani NI'dir.

Bu çalışmada gecikmeli sistemlerin NI olması ve iki NI sistemin pozitif geri besleme altında kararlılığıyla ilgilenildiği için, [8] de verilen kararlılık teoreminin LTI sistemler için geçerli olan biçimi aşağıda verilmiştir.

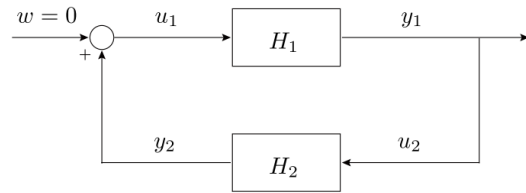
Teorem 1[8]: İki farklı NI sistem H_1 ve H_2 ,

$$H_1: \begin{cases} \dot{x}_1(t) = A_1x_1(t) + B_1u(t) \\ y_1(t) = C_1x_1(t) + D_1u(t) \end{cases} \quad (5)$$

$$H_2: \begin{cases} \dot{x}_2(t) = A_2x_2(t) + B_2u(t) \\ y_2(t) = C_2x_2(t) + D_2u(t) \end{cases} \quad (6)$$

ele alınsın. H_1 'in SNI H_2 'nin de NI LTI sistemler oldukları varsayılınsın. H_2 sisteminin DC kazancı pozitif olsun ve Şekil 1'de verilen sistemin açık çevrim DC kazancı $[-1,1]$ arasında kalsın. Bu durumda Şekil 1'deki gibi pozitif geri beslemeli kapalı çevrimli sistem kararlı olur [8].

Teoremin lineer olmayan sistemlere ilişkin biçimi ve ayrıntılı bilgiler [8] çalışmasından bulunabilir.



Şekil 1: H_1 ve H_2 dinamik pasif sistemlerin pozitif geri beslemeli bağlantısı.

3. Ana Sonuçlar

Bu bölümde önce zaman gecikmeli neutral tip LTI sistemlerin dinamik pasif dolayısı ile NI olmasına ilişkin koşulları veren lemma verilecektir.

Sistem modeli,

$$\dot{x}(t) - F\dot{x}(t - g) = A_0x(t) + A_1x(t - h) + B_1u(t) \quad (7)$$

$$z(t) = Cx(t)$$

şeklinde ele alınmıştır.

Tanım 7: $V(x(t))$ türevi alınabilir bir fonksiyon olduğu için (7) denkleminde verilen zaman gecikmeli sistem,

$$\dot{V}(x(t)) \leq u^T(t)\dot{z}(t) \quad (8)$$

eşitsizliğine sağlıyorsa dinamik dissipatif yani NI'dir.

Buna göre (8) eşitsizliğini sağlayan $V(x): R^n \rightarrow R^+$ bir depo fonksiyonu bulunabiliyorsa, dinamik dissipatif yani NI'dir.

Lemma 1: Eğer (9)'daki lineer matris eşitsizliğini (LMI) sağlayan, $P > 0$, $P_2, P_3, R > 0$, $U > 0$ ve $S > 0$ matrisleri bulunabiliyorsa, (7) denklemiyle verilen gecikmeli neutral tip sistem, $g > 0$ için dinamik dissipatif yani NI'dir.

$$\begin{bmatrix} A^T P_2 + P_2^T A + S - R & P - P_2^T + A^T P_3 & P_2^T A_1 + R & P_2^T F & P_2^T B_1 \\ * & -P_3 - P_3^T + h^2 R + U & P_3 A_1 & P_3^T F & P_3^T B_1 - 0.5 C^T \\ * & * & -S - R & 0 & 0 \\ * & * & * & -U & 0 \\ * & * & * & * & 0 \end{bmatrix} \stackrel{(9)}{\leq} 0$$

İspat : (7) denklemiyle verilen zaman gecikmeli neutral sistem için

$$\dot{x}(t) = y(t) \quad (10)$$

şeklinde yeni bir değişken tanımlırsa, eşdeğer descriptor sistemin durum uzayı gösterilimi

$$\dot{x}(t) = y(t)$$

$$y(t) = Fy(t-g) + A_0 x(t) + A_1 x(t-h) + B_1 u(t) \quad (11)$$

olarak elde edilir. İspat için uygun bir depo fonksiyonu seçilmelidir. Gecikmeli sistemlerin pasif olma koşullarının türetilmesinde kullanılan depo fonksiyonu için literatürde çok farklı seçimler mevcuttur. Bu çalışmada, zaman gecikmeli neutral sistemlerin kararlılık analizinde de sıklıkla kullanılan Lyapunov Krasovski Fonksiyoneli (LKF) [9],

$$\begin{aligned} V(t, x_t, \dot{x}_t) &= x(t)^T P x(t) + \int_{t-h}^t x^T(s) S x(s) ds \\ &+ \int_{t-g}^t \dot{x}^T(s) U \dot{x}(s) ds \\ &+ h \int_{-h}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{x}^T(s) R \dot{x}(s) ds d\theta \end{aligned} \quad (12)$$

depo fonksiyonu olarak seçilmiştir.

Dinamik dissipatif olma yani NI olma tanımı için (8)'de verilen $\dot{V}(x(t)) \leq u^T(t) \dot{z}(t)$ eşitsizliğinin kullanımı tercih edilmiştir. İşlem kolaylığı için (12)'deki LKF'yi,

$$V(t, x_t, \dot{x}_t) = V_1(\dots) + V_2(\dots) + V_3(\dots) + V_4(\dots) \quad (13)$$

şeklinde yazalım ve toplama giren terimlerin türevlerini ayrı ayrı hesaplayalım. V_1 'in türevi descriptor dönüşüm dikkate alınarak [9],

$$\begin{aligned} \frac{dV_1}{dt} &= \frac{dx(t)^T P x(t)}{dt} \\ &= 2z(t)^T P \dot{z}(t) + \dot{z}^T(t) U \dot{z}(t) \\ &- \dot{z}^T(t-g) U \dot{z}(t-g) \\ &+ 2[z^T(t) P_2^T \\ &+ \dot{z}^T(t) P_3^T][-\dot{z}(t) + y(t)] \\ &= \\ &2z(t)^T P \dot{z}(t) + \dot{z}^T(t) U \dot{z}(t) - \dot{z}^T(t-g) U \dot{z}(t-g) \\ &+ \\ &+ 2[z^T(t) P_2^T + \dot{z}^T(t) P_3^T][-\dot{z}(t) + Fy(t-\tau) + A_0 z(t) + B_1 u(t)] \end{aligned} \quad (14)$$

hesaplanır. Diğer terimlerin türevleri ise,

$$\begin{aligned} \frac{dV_2}{dt} &= \\ x^T(t) S x(t) - x^T(t-h) S x(t-h) \\ \frac{dV_3}{dt} &= \end{aligned} \quad (15)$$

$$\dot{x}^T(t) U \dot{x}(t) ds - \dot{x}^T(t-h) U \dot{x}(t-h) ds$$

$$\frac{dV_4(t)}{dt} = h^2 \dot{x}^T(s) R \dot{x}(s) - h \int_{t-h}^t \dot{x}^T(s) R \dot{x}(s) ds$$

ve Jensen eşitsizliği [9] kullanılarak,

$$\begin{aligned} \frac{dV_4}{dt} &= h \int_{t-h}^t \dot{x}^T(s) R \dot{x}(s) ds \\ &\leq -[x(t) - x(t-h)]^T R [x(t) \\ &- x(t-h)] \end{aligned} \quad (16)$$

şeklinde elde edilir.

LKF'nin türevi hesaplanırken Jensen eşitsizliği kullanılması gerekmiştir. Bu nedenle (12)'de verilen LKF'nin türevinin üst sınırının alınacağı değer hesaplanabilmektedir. Katkı oranı, LKF'nin türevi ve türevinin üstten sınırlı olarak birlikte (8)'de yerine yazılır, $\zeta(t) = [x^T(t), \dot{x}^T(t), x^T(t-h), \dot{x}^T(t-h), w^T(t)]^T$ olarak seçilirse,

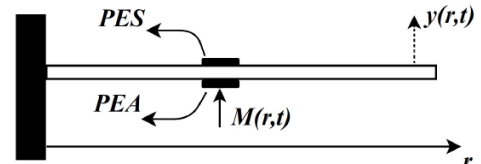
$$\frac{dV}{dt} - u^T(t) \dot{z}(t) \leq \zeta^T(t) \Psi_{\text{const}} \zeta(t) \leq 0 \quad (17)$$

eşitsizliği elde edilir. Ψ_{const} (10) denkleminin sol tarafındaki matristir, bu da ispatı tamamlar. □

4. Esnek Sistemin Modellenmesi ve Zaman Gecikmeli Kontrolün Benzetim Sonuçları

4.1. Esnek Sistem Modeli

Titreşim sönümlenme probleminin ele alınacağı saplı kiriş şeması Şekil 2'de verilmiştir. Kiriş üzerinde eş konumlu olarak yerleştirilmiş pizeoelektrik eyleyici (PEA) ve sensör (PES) çifti bulunmaktadır.



Şekil 2: Üzerinde eş konumlu yerleştirilmiş PES-PEA çifti bulunan bir ucu sabit kiriş.

Üzerinde çalıştığımız saplı kiriş sisteminin dinamikleri göz önüne alındığında, esnek bir sistem yani dağılmış parametrelili bir sistem olarak ele alınması ve dolayısıyla kısmi diferansiyel denklemlerle (PDE) modellenmesi uygun olacaktır.

Ancak PDE modelinin kullanılması, kontrolörün transfer fonksiyonu biçiminde seçilmesi durumunda analiz ve tasarım problemini zorlaştırır. İyi bilinen kontrol tasarım yöntemlerinin kullanılmasını mümkün kılmak amacıyla, PDE ile verilen sistem modeli, modal analiz ya da "assumed mode" gibi yöntemler kullanılarak ayrıklaştırılması sıklıkla kullanılan yöntemlerdendir [10].

Bu çalışmada da PDE ile verilen sistem modeli, “*assumed mode*” yöntemiyle ayrıklaştırılıp transfer fonksiyonu modeline geçilecektir. “*Assumed mode*” yöntemine göre piezoelektrik eyleyiciye uygulanan gerilim ile piezosensörden ölçülen gerilim arasındaki ilişkiyi tanımlayan sistem modeli,

$$G(s) = \frac{V_c(s)}{V_a(s)} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{C_a \phi_i(r) [\phi'_i(r_1) - \phi'_i(r_2)]}{\rho AL^3 (s^2 + w_i^2)} \quad (18)$$

ile sonsuz toplam olarak elde edilmiştir [11]. Burada, $\phi_i(r)$ mod şekillerini, A kirişin kesit alanını, L kirişin boyunu, ρ kirişin yoğunluğunu, C_a giriş parametreleriyle hesaplanan kazanç değerini, r_1 ve r_2 ise sırasıyla piezoelektrik malzemenin giriş üzerindeki başlangıç ve bitiş konumlarını göstermektedir.

Sonsuz sayıda mod içeren sistem modelinin, kontrolör tasarımı ve performans analizi için kullanımı mümkün değildir. Bu nedenle, titreşim sönümlemenin hedeflendiği frekans bandında doğruluğu yüksek bir sistem modeli kullanımı tercih edilmektedir.

Buna göre sistem modeli,

$$G(s) = \frac{V_c(s)}{V_a(s)} = \sum_{i=1}^M \frac{C_a \phi_i(r) [\phi'_i(r_1) - \phi'_i(r_2)]}{\rho AL^3 (s^2 + w_i^2)} \quad (19)$$

ilk M modu içerecek şekilde belirlenir.

Yeterince yüksek sayıda mod içeren sistem modelinin kontrol modeli olarak kullanılması durumunda, sistemin kutupları orijinal sistemle aynı olacaktır. Fakat ihmal edilen modlar nedeniyle, sistem sıfırlarında sonsuz modlu sistem göre farklılıklar görülecektir. Bizim de üzerinde çalıştığımız, eş konumlandırılmış piezoelektrik sensör ve eyleyici çiftleri bulunan sistemlerde, ihmal edilen modların DC kazanç teriminin tamamının pozitif olması nedeniyle sıfırlar üzerindeki etkisi daha da fazladır [12]. Bu olumsuz etkiyi giderebilmek amacıyla ilk M moda DC kazanç terimi (D) eklenir:

$$G(s) = \sum_{i=1}^M \frac{C_a \phi_i(r) [\phi'_i(r_1) - \phi'_i(r_2)]}{\rho AL^3 (s^2 + w_i^2)} + D \quad (20)$$

Sonuç olarak kontrolör tasarım modeli olarak (21) denklemleri verilen model kullanılmış, giriş ve piezoelektrik malzemeye ilişkin değerler ise [11,13,14] çalışmalarından elde edilmiş ve Tablo 1 de verilmiştir.

Tablo 1: Kiriş ve Piezoelektrik Malzeme Katsayıları [11,13,14].

Kiriş Uzunluğu L	0.77m
Kiriş genişliği h	0.05
Kiriş Kalınlığı W	0.006m
Kiriş Yoğunluğu ρ	2.770×10^3
Piezoseramik pozisyonu r_1	0.05m
Piezoseramik pozisyonu r_2	0.12m
Piezoseramik Young Modülü E_p	$6.7 \times 10^{10} N/m^2$
Yük sabiti d_{31}	$-2.1 \times 10^{-10} m/V$
Gerilim sabiti g_{31}	-1.15×10^{-2}
Kapasite C	$1.05 \times 10^{-7} F$
Piezoseramik genişliği W_p	0.025m
Piezoseramik kalınlığı h_p	$2.5 \times 10^{-4} m$
Elektromekanik kuplaj katsayısı k_{31}	0.34

Tasarım modelinde sistem tek modlu kabul edilmiş ve ihmal edilen modları kompanse edebilmek için D sabit terimi hesaplanmıştır. Bu durumda sistem modeli,

$$G(s) = \frac{V_c(s)}{V_a(s)} = \frac{k}{s^2 + 2\zeta w_n s + w_n^2} + D \quad (21)$$

olur. Sistem parametreleri hesaplanmış ve Tablo 2’de verilmiştir.

Tablo 2: Tek Modlu Sistemin Parametreleri.

k	ζ	w_n	D
396.07	0.0006	50.1796	0.55

4.2. Zaman Gecikmeli Kontrolör Tasarımı ve Benzetim Sonuçları

Bu çalışmada, literatürde mevcut olan ve PPF’yi geliştirmek amacıyla önerilen Modifiye pozitif Pozisyon Geri Beslemeli (MPPF) [15] kontrolöre benzer bir kontrol yapısı önerilmiştir. MPPF kontrolör transfer fonksiyonu

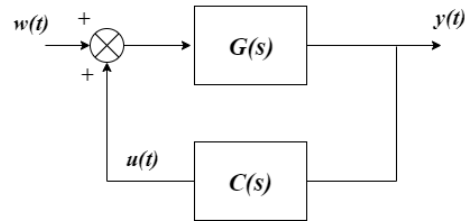
$$C_{Mppf}(s) = \frac{k_1 w_n^2}{s^2 + 2\zeta_2 w_n s + w_n^2} + \frac{k_2 w_n}{s + w_n} \quad (22)$$

şeklinde. Yani standart PPF kontrolöre alçak geçiren filtre bağlanmasıyla elde edilmiştir.

Bu çalışmada ise, PPF kontrolöre gecikme terimi içeren bir alçak geçiren sistem eklenerek bir kontrolör elde edilmiştir. Önerilen PPF+Retarded (PPFR) kontrolörün transfer fonksiyonu,

$$C_{ppfretarded}(s) = \frac{k_1 w_n^2}{s^2 + 2\zeta_2 w_n s + w_n^2} + \frac{k_2}{s + a_0 + a_1 e^{-hs}} \quad (23)$$

şeklinde. $G(s)$ sistem modeli ve $C(s)$ kontrolörü temsil etmek üzere kullanılacak kontrol şeması Şekil 3’te verilmiştir. Sistem girişi $w(t)$ bozucu işareti ve $y(t)$ ise çıkış salınım miktarıdır.



Şekil 3: Kontrol şeması.

PPF kontrolörün NI olduğu bilinmektedir. İki NI sistemin paralel bağlantısı da NI olur [5]. Bu nedenle kapalı çevrimli sistemin kararlılığı için (24) ile verilen kontrolörün sadece zaman gecikmesi terimini içeren kısmının NI olması gerek koşuldur. Kapalı çevrimli sistemin kararlılığını Teorem 1’de verilen koşulların sağlanması garanti edecektir.

Kontrolör parametrelerinin belirlenmesi için H_∞ normu temelli bir ölçüt kullanılmış ve parametreler genetik algoritmayla belirlenmiştir. Kontrolörün serbest parametreleri k_1, k_2, a_1, a_0 ve τ 'lerin hesaplanması için tanımlanan ölçüt

$$\min_{k_1, k_2, a_1, a_0, \tau} \|T(s)\|_\infty + b_0 T(0) \quad (24)$$

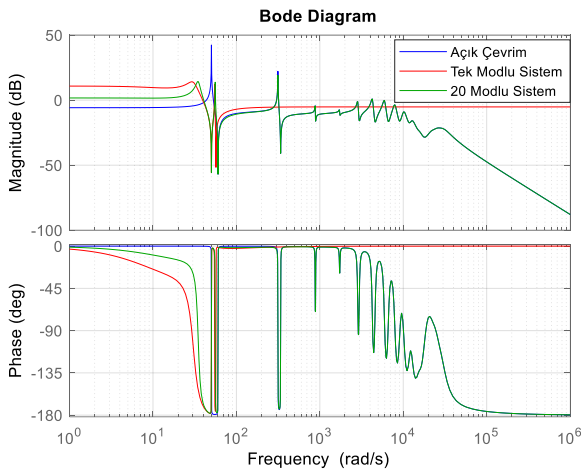
şeklinde önerilmiştir. $T(s)$, Şekil 3'te blok diyagramı verilen kontrol edilmiş sistemin kapalı çevrim transfer fonksiyonudur. DC kazanç terimi, $b_0 T(0)$, ise kapalı çevrim sistemin düşük frekanslarda titreşim bastırma performansını iyileştirmek için eklenmiştir. Kapalı çevrimli sistemin zaman gecikmeli olması nedeniyle sonsuz normunun hesaplanması için [16, 17]'de verilen Matlab toolbox kullanılmıştır. Elde edilen kontrol parametre değerleri Tablo 3'te verilmiştir.

Tablo 3: Kontrolör Parametreleri.

k_1	k_2	a_0	a_1	h
0.732	9.773	18.473	6.315	0.06

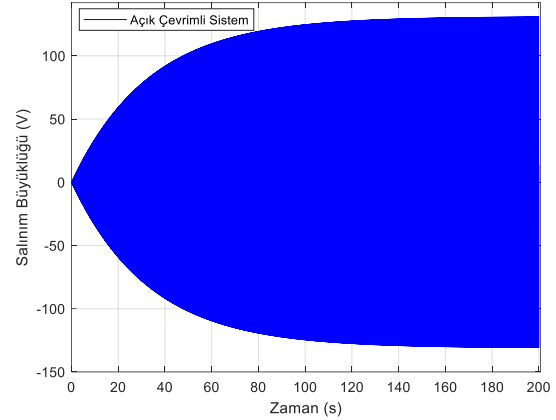
PPFR kontrolörün NI olduğu parametre bölgesi, bu çalışmada geliştirilen NI Lemma ile belirlenmiştir. İlaveten, Teorem 1 deki koşullar, yani kontrolörün DC kazancının pozitif olmasını ve tüm sistemin açık çevrim DC kazancının birden küçük olmasını sağlayan parametreler seçildiği için kapalı çevrimli sistemin kararlılığı sağlanmıştır. Sonuç olarak kapalı çevrimli sistem kararlı bırakan ve (25) deki amaç ölçütünü en az yapan kontrolör parametreleri Tablo 3'deki gibi bulunmuştur. Bu parametreler için kontrolörün NI kalmasını garanti eden zaman gecikmesinin sınırları $h \in [0, 0.15]$ olarak belirlenmiştir.

Şekil 4'te hem tek modlu hem de 20 modlu sistem modeli kullanılarak elde edilen, sistemin PPFR kontrolör ile kapalı çevrim frekans yanıtları verilmiştir. Şekilden de görüldüğü üzere PPFR kontrolörün rezonans frekansındaki bastırma performansı iyidir, fakat rezonans frekansı ve DC frekans civarında yanıtında bazı bozulmalar mevcuttur. Kontrolörün tasarımında bir modlu sistem modeli kullanılmasına rağmen, gerçek sistem olarak kabul edebileceğimiz, yüksek sayıda mod içeren sistem modeli için de kapalı çevrimli sistemin kararlı kalması, bu çalışmada geliştirilen Lemma'nın geçerliliğini göstermiştir.



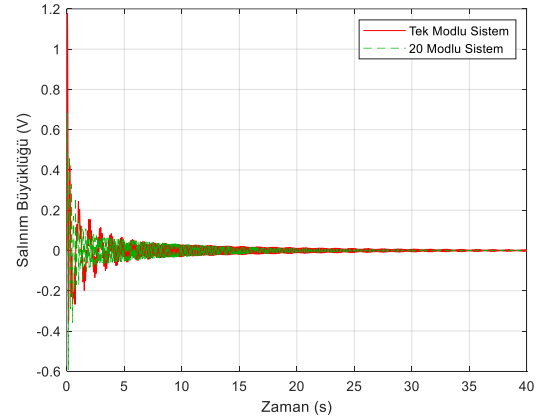
Şekil 4: PPFR Kontrolörün Frekans Bölgesi Yanıtı.

Öncelikle açık çevrimli sistemin, rezonans frekansında uyarın sürekli bir bozucu altında yanıtı Şekil 5'te verilmiştir. Sistemin salınım genliğinin yüksek olduğu gözlemlenmiştir.



Şekil 5 Açık Çevrim Sistem Zaman Yanıtı

Daha sonra, PPFR kontrolörün zaman bölgesi performansını değerlendirmek için kontrolör hem tek modlu sisteme hem de 20 modlu sisteme uygulanmış ve rezonans frekansında uyarın sürekli bir bozucu altında sistemlerin zaman yanıtı Şekil 6'da verilmiştir. Zaman ve frekans bölgesinde yapılan değerlendirmelere göre kontrolörün tek modlu ve 20 modlu sistem modelinde performansı birbirine yakındır.



Şekil 6: PPFR Kontrolörün Zaman Bölgesi Yanıtı.

5. Sonuçlar

Bu çalışmada zaman gecikmeli neutral tip LTI sistemlerin NI olma koşulları ele alınmış ve zaman gecikmeli sistemlerin dinamik pasif olma yani NI olma koşullarına ilişkin özgün bir Lemma sunulmuştur. Böylece literatürde disipatiflik üzerinden tanımlanmış bir kararlılık teoreminin, sonsuz boyutlu bir NI sistem ile zaman gecikmesine sahip NI özelliğinde olan LTI bir sistemin pozitif geribesleme altında kararlı olma koşulları elde edilmiştir.

NI olma koşullarını veren Lemma'nın uygulaması olarak, üzerinde eş konumlu piezoelektrik sensör ve eyleyici bulunan esnek saplı kiriş (akıllı saplı kiriş) sonsuz boyutlu örnek sistem olarak seçilmiştir. Titreşim kontrolü amacıyla gecikme terimi

içeren bir kontrolör seçilmiş ve kontrolör parametreleri H_{∞} normu temelli bir amaç ölçütünü minimum yapacak şekilde elde edilmiştir. Sistemin kararlılığı ise NI Lemma kullanılarak sağlanmıştır.

Tek modlu sistem modeli kullanılarak tasarlanmış kontrolör 20 modlu sistemin kontrolü için kullanılmış ve kapalı çevrimli sistemin kararlı kaldığı benzetim sonuçları ile de doğrulanmıştır.

Kaynakça

- [1] Lanzon, Alexander, and Ian R. Petersen. "Stability robustness of a feedback interconnection of systems with negative imaginary frequency response," *IEEE Transactions on Automatic Control*, Cilt: 53, No:4: s:1042-1046. ,2008.
- [2] Mabrok, Mohamed A., et al. "Generalizing negative imaginary systems theory to include free body dynamics: Control of highly resonant structures with free body motion," *IEEE Transactions on Automatic Control*, Cilt: 59, No:10, s:2692-2707, 2014.
- [3] Khalil, H. K. *Nonlinear systems (3rd ed.)*. Upper Saddle River, NJ, USA:Prentice Hall, 2002.
- [4] Lozano, Rogelio, et al. *Dissipative systems analysis and control: theory and applications*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [5] Petersen, Ian R., and Alexander Lanzon. "Feedback control of negative-imaginary systems," *IEEE Control Systems Magazine*, Cilt: 30, No:5, s:54-72, 2010.
- [6] Lanzon, Alexander, and Parijat Bhowmick. "Characterization of Input–Output Negative Imaginary Systems in a Dissipative Framework," *IEEE Transactions on Automatic Control*, Cilt: 68, No:2, s:959-974, 2022.
- [7] Fridman, Emilia, and Uri Shaked. "On delay-dependent passivity," *IEEE Transactions on Automatic Control*, Cilt: 47, No:4, s: 664-669, 2002.
- [8] Ghallab, Ahmed G., and Ian R. Petersen. "Negative imaginary systems theory for nonlinear systems: A dissipativity approach." arXiv preprint arXiv:2201.00144, 2022.
- [9] Fridman, E., *Introduction to time-delay systems: Analysis and control*. Springer, 2014.
- [10] S. S. Rao, *Vibration of continuous systems*. Hoboken, Nj,Usa: John Wiley & Sons Ltd, 2019.
- [11] Moheimani, S. R. (1999, February). Experimental verification of the corrected transfer function of a piezoelectric laminate beam. In 1999 Information, Decision and Control.
- [12] Moheimani, SO Reza, Andrew J. Fleming, and Dunant Halim. *Spatial control of vibration: theory and experiments..* World scientific, 2003.
- [13] PI Ceramic (2010), Product Information Cataloge
- [14] Gopalakrishnan, N. "Piezoelectric sensor–based damage progression in concrete through serial/parallel multi-sensing technique," *Struct. Heal. Monit* Cilt:1, No: 18. 2019.
- [15] Mahmoodi, S. Nima, and Mehdi Ahmadian. "Active vibration control with modified positive position feedback," 2009.
- [16] P. Appeltans, H. Silm and Wim Michiels., "TDS-CONTROL: a MATLAB package for the analysis and controller-design of time-delay systems," *IFAC-PapersOnLine*, Cilt:55, No:16, s:272-277, 2022.
- [17] P. Appeltans and W. Michiels. " Analysis and controller-design of time-delay systems using TDS-CONTROL. A tutorial and manual," *E-print arXiv:2305.00341*, 2023.