

Kinematik Fazlalıklı Robot Manipülatörlerin Görev Alanı Kısıt Kontrolü

Task Space Constraint Control of the Kinematically Redundant Robotic Manipulators

Samet Gül¹, Erkan Zergeroğlu¹

¹Bilgisayar Mühendisliği Bölümü
Gebze Teknik Üniversitesi, Gebze, Kocaeli

{sametgul}@gtu.edu.tr

{e.zerger}@gtu.edu.tr

Özetçe

Bu çalışma, görev alanı takip hatalarını kısıtlamaya odaklanan, kinematik fazlalıklı robot manipülatörler için özel olarak geliştirilmiş model tabanlı bir kontrolcü formülasyonunun tasarımını ve buna karşılık gelen kararlılık analizini sunmaktadır. Önerilen kontrolcü, uç efektör pozisyon takip hatası başlangıç değerinin önceden tanımlanmış bir bölgede başlaması koşuluyla eksponansiyel eklem pozisyon ve alt görev takibini garanti etmektedir. Görev alanı takip hatası terimine uygulanan kısıtlama ise, manipülatörün uç efektörü için öngörülebilir bir sinyal aşımını garanti etmekte ve önceden belirlenmiş geçici performansla imkanı vermektedir. Kapalı döngü sisteminin kararlılığı ve yakınsaması, bariyer Lyapunov fonksiyonu (BLF) tabanlı bir argümanla ispat edilmiştir. Önerilen yaklaşımla elde edilen performans sergileyerek kontrol yasasının etkinliğini göstermek için simülasyon çalışmaları gerçekleştirilmiştir.

Abstract

This study presents the design and corresponding stability analysis of a model-based controller formulation specifically developed for kinematically redundant robotic manipulators, with a focus on constraining task space tracking errors. The proposed controller guarantees exponential link position and subtask tracking, provided that the initial value of the end-effector position tracking error starts within a predefined region. The constraint imposed on the task space tracking error term ensures a predictable overshoot of the manipulator's end-effector and allows predetermined transient performance. The stability and convergence of the closed-loop system are proved via a barrier Lyapunov function-based argument. Simulation studies are provided to demonstrate the effectiveness and the performance of the control law.

1. Giriş

Fiziksel sistemler genellikle sağlıklı çalışmaları için çeşitli kısıtlara ihtiyaç duyarlar. Bu kısıtlar, fiziksel sınır, satürasyon,

performans ve güvenlik gibi çeşitli biçimlerde olabilir. Örneğin, insanlar ve robot manipülatörlerin birlikte çalıştığı iş ortamlarında sistem durumları doğrudan manipüle edilemezse, bu durumların en azından belirli sınırlar içinde tutulması önemli hale gelir. Aksi takdirde, performans kaybı, tehlikeler veya sistem hasarı oluşabilir.

Bu tür problemler için önerilen çözümlerden biri, kontrolcü tasarımlarına BLF'lerinin entegre edilmesiyle sistem üzerine kısıtlama uygulanması fikridir [1, 2]. BLF'leri, argümanları belirli sınırlara yaklaştıkça sonsuz bir büyüme sergileyen fonksiyonlardır. Bu yüzden, eğer bir BLF'nun kapalı döngü sistemi içerisinde sınırlılığı korunursa, argümanlarının istenilen sınırları asla aşmaması sağlanır. Bu fikri kullanan çalışmaların bir kısmından söz etmek gerekirse; [1]'de, BLF kullanılarak çoklu durum kısıtlaması gerçekleştirilen bir entegratör geri adım tasarımı sunulmuştur. Lineer olmayan sistemler için çıkış kısıtlamalı bir kontrolcü uygulaması ise [2]'de önerilmiştir. Bu çalışmanın sonucu, [3]'te değişken sistem çıkışlarını kısıtlamaya genişletilmiştir. Doğrusal olmayan saf geri besleme sistemleri için tam durum kısıtlamasına sahip BLF'na dayalı uyarlanabilir bir kontrolcü tasarımı [4]'te verilmektedir. Belirsizlikleri olan lineer olmayan sistemler için diğer uyarlanabilir BLF tipi tasarımlar [5] ve [6]'da bulunabilir. [7]'de yazarlar, servo sistemler için BLF tabanlı bir sistematik hareket kontrolcüsü tasarlamışlardır. [8]'de yazarlar, model belirsizlikleri olan robot manipülatörler için bir sinir ağı tabanlı kontrolcü tasarımını sunmuşlardır. İki ayaklı bir robotun tanjant BLF'na dayalı gürbüz sabit zamanlı kontrolü [9]'da sunulmuştur. BLF'larına dayalı sinir ağı tabanlı uyarlanabilir yöntemler, deniz taşıtları için [10] ve [11]'de farklı kontrol problemlerini ele almak üzere tasarlanmıştır. [12]'de, bilinmeyen sanal kontrol katsayıları olan ve tam durum kısıtlamalı katı geri beslemeli lineer olmayan sistemler için iki BLF tabanlı uyarlanabilir kontrol şeması önerilmiştir. BLF kullanarak robot manipülatörler için tekil olmayan terminal kayan modlu bir kontrolcü tasarımı [13]'te verilmektedir. Uzun manipülatörü için tanjant tipi BLF kullanılarak birleşik nöral çıkış kısıtlı kontrolcü tasarımı [14]'te gerçekleştirilmiştir.

Konu ile ilgili daha önce gerçekleştirdiğimiz, [15]'te tam durum geri besleme durumundaki, [16]'da ise, çıkış geri besleme durumundaki robot manipülatörler için eklem pozisyon takip hatasını önceden belirlenen sınırlar içerisinde tutarak eklem

uzayında takip kontrolü gerçekleştiren BLF tabanlı kontrolcü tasarımları sunulmuştur. Çalışmalarımızın devamı olan bu çalışmada, kinematik fazlalıklı robot manipülatörlerin görev uzayında takip kontrolü ve görev uzayı takip hatasının önceden belirlenen sınırlar içerisinde tutulması amaçlanmıştır. Literatürdeki benzer kontrolcü tasarımlarından farklı olarak hataya bağlı bir takip hatası kontrol kazancı matrisi önerilmiştir. Takip hatası teriminin kararlılığı ve yakınsaması ile kapalı döngü sinyallerinin sınırlılığı, BLF tabanlı bir analizle sağlanmıştır. Önerilen kontrolcünün performansını ve uygulanabilirliğini göstermek için üç serbestlik dereceli döner eklemlili düzlemsel bir robot manipülatör modeli kullanılarak simülasyon çalışmaları gerçekleştirilmiştir.

2. Kinematik ve Dinamik Model

Görev uzayında $x(t) \in \mathbb{R}^m$ ile gösterilen manipülatörün uç efektörünün pozisyon ve oryantasyonu aşağıdaki şekilde tanımlanır

$$x = f(q), \quad (1)$$

$f(q) \in \mathbb{R}^m$ ileri kinematigi, $q(t) \in \mathbb{R}^n$ eklem pozisyonlarını ifade etmektedir. Denklem (1) kullanılarak, uç efektör pozisyonu ve eklem pozisyonları arasındaki ilişki aşağıdaki şekilde türetilebilir

$$\begin{aligned} \dot{x} &= J(q)\dot{q}, \\ \ddot{x} &= \dot{J}(q)\dot{q} + J(q)\ddot{q}, \end{aligned} \quad (2)$$

$\dot{q}(t)$ ve $\ddot{q}(t) \in \mathbb{R}^n$ sırasıyla eklem hız ve ivmesini ifade etmektedir, $J(q) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ise, manipülatörün jacobii matrisidir ve

$$J(q) = \frac{\partial f(q)}{\partial q} \quad (3)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. $J(q)$ 'nin Moore-Penrose sözde tersi $J^+(q) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ olarak gösterilir ve aşağıdaki denklemle tanımlanır [17]

$$J^+ = J^T (JJ^T)^{-1}. \quad (4)$$

Sözde ters $J^+(q)$ aşağıdaki şartı sağlamaktadır

$$JJ^+ = I_m \quad (5)$$

ve $I_m \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $m \times m$ boyutundaki birim matrisi belirtir. Ayrıca, $(I_n - J^+J)$ matrisi aşağıdaki özellikleri sergilemektedir

$$\begin{aligned} (I_n - J^+J)(I_n - J^+J) &= I_n - J^+J & J(I_n - J^+J) &= 0 \\ (I_n - J^+J)^T &= (I_n - J^+J) & (I_n - J^+J)J^+ &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

ve I_n , $n \times n$ boyutlu birim matrisi belirtir.

n serbestlik dereceli döner eklemlili ve doğrudan tahrikli bir robot manipülatörünün dinamik modeli aşağıdaki şekilde verilir [18]

$$M(q)\ddot{q} + V_m(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) + F_d\dot{q} = \tau, \quad (7)$$

burada $q(t)$, $\dot{q}(t)$ ve $\ddot{q}(t) \in \mathbb{R}^n$ sırasıyla eklem pozisyonları, hızları ve ivmelerini temsil eder, $M(q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ atalet matrisini, $V_m(q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ merkezci Coriolis matrisini, $G(q) \in \mathbb{R}^n$ yerçekimi etkilerini, $F_d \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sabit diyagonal viskoz sürtünme etkilerini ve $\tau(t) \in \mathbb{R}^n$ kontrol giriş torkunu

temsil etmektedir. Robot dinamiği (7) aşağıdaki özelliklere sahiptir.

Özellik 1: Eylemsizlik matrisi $M(q)$ simetriktir ve pozitif tanımlıdır, aşağıdaki eşitsizliği sağlar

$$m_1\|\xi\| \leq M(q) \leq m_2\|\xi\| \quad \forall \xi \in \mathbb{R}, \quad (8)$$

burada m_1 ve m_2 atalet matrisini sınırlayan pozitif sabitlerdir ve $\|\cdot\|$ standart Öklid normudur.

Özellik 2: Eylemsizlik matrisi ve merkezci Coriolis matrisi, çarpık-simetri ilişkisini sağlar

$$\xi^T (\dot{M} - 2V_m)\xi = 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (9)$$

Özellik 3: Denklem (7)'de verilen robot dinamiği, şu şekilde lineer olarak parametrelerine ayrılabilir

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) + F_d\dot{q} = W(q, \dot{q}, \ddot{q})\theta, \quad (10)$$

$\theta \in \mathbb{R}^p$ sabit sistem parametrelerini içerir, $W(q, \dot{q}, \ddot{q}) \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ise, $q(t)$, $\dot{q}(t)$ ve $\ddot{q}(t)$ 'ye bağlı bilinen fonksiyonların regresyon matrisini temsil eder.

3. Kontrol Hedefi ve Hata Sistemi Geliştirme

Kontrol stratejimizin ilk amacı, zaman sonsuza yaklaşırken robotun uç efektör pozisyonu olan $x(t)$ 'yi, görev alanında tanımlı istenilen yörünge olan $x_d(t)$ 'ye süren ve $\tau(t)$ olarak gösterilen bir kontrol tork giriş sinyali tasarlamaktır. Buna ek olarak ikinci kontrol hedefi, m -boyutlu görev alanının her bir boyutu i için $e_i(t)$ takip hatasının, tüm pozitif zaman değerleri için önceden tanımlanmış bir Δ_i sınırı içinde kalmasını sağlamaktır ve bu aşağıdaki gibi ifade edilebilir

$$|e_i| < \Delta_i, \quad \forall t > 0. \quad (11)$$

Bu amaçlar doğrultusunda, görev alanı pozisyon takip hatası $e(t) \in \mathbb{R}^m$ aşağıdaki gibi tanımlanır

$$e = x_d - x. \quad (12)$$

Analiz sırasında eklem pozisyon ve hız ölçümlerinin kullanılabilir olduğu ve istenilen görev alanı yörüngesiyle beraber ilk iki türevinin sınırlı fonksiyonlar olduğu varsayılmaktadır. Ek olarak [19]'daki gibi, $e_N(t) \in \mathbb{R}^n$ alt görev takip hatası aşağıdaki şekilde tanımlanır

$$e_N = (I_n - J^+J)(g - \dot{q}), \quad (13)$$

$g(t) \in \mathbb{R}^n$, alt görev kontrol amacına (eklem sınırlarından ya da engellerden kaçınma gibi amaçlara) dayalı olarak oluşturulan bir yardımcı sinyaldir. Kapalı döngü hata sistemini elde etmek amacıyla, (12)'nin türevi alınır ve (2)'deki $\dot{x}(t)$ yerine konulursa aşağıdaki ifade elde edilir

$$\dot{e} = \dot{x}_d + \alpha e - \alpha e - J\dot{q}, \quad (14)$$

burada αe terimi, kontrol formülasyonunu kolaylaştırmak için eklenmiş ve çıkarılmıştır ve $\alpha \in \mathbb{R}^{m \times m}$ köşegen, pozitif tanımlı bir kazanç matrisidir. Manipülatörün jacobii matrisinin

sözde ters koşulu (5)'i ve (6)'da verilen $(I_n - J^+J)$ matrisinin özellikleri kullanılarak, (14) şu şekilde yeniden yazılabilir

$$\dot{e} = -\alpha e + J(J^+(\dot{x}_d + \alpha e) + (I_n - J^+J)g - \dot{q}). \quad (15)$$

Takip eden analiz ve (15)'ya dayanarak, $r(t) \in \mathbb{R}^n$ ile gösterilen filtrelenmiş takip hatası aşağıdaki gibi tanımlanır

$$r = J^+(\dot{x}_d + \alpha e) + (I_n - J^+J)g - \dot{q}. \quad (16)$$

Kapalı döngü görev alanı pozisyon takip hata sisteminin son hali aşağıdaki gibi yazılabilir

$$\dot{e} = -\alpha e + Jr. \quad (17)$$

Denklem (17) ile ifade edilen ilişki, $e(t)$ 'yi kontrol etmek için $r(t)$ 'yi kontrol etmenin gerekli olduğunu açıkça göstermektedir. O halde $r(t)$ için açık döngü dinamiğine ihtiyaç duyulmaktadır, bu dinamik (16)'nin türevi alınarak ve $M(q)$ atalet matrisi ile önden çarpılarak elde edilir. Dinamik model (7)'yi bu denkleme dahil edip $\pm V_m(q, \dot{q})r$ terimlerini ekleyerek, $r(t)$ 'nin açık döngü dinamiği aşağıdaki gibi elde edilir

$$M(q)\dot{r} = -V_m(q, \dot{q})r + Y\theta - \tau \quad (18)$$

ve dinamikteki $Y\theta$ terimi aşağıdaki gibi tanımlıdır

$$Y\theta = M(q) \frac{d}{dt} \{J^+(\dot{x}_d + \alpha e) + (I_n - J^+J)g\} + V_m(q) \{J^+(\dot{x}_d + \alpha e) + (I_n - J^+J)g\} + G(q) + F_d\dot{q}, \quad (19)$$

burada $Y(\ddot{x}_d, \dot{x}_d, x, q, \dot{q}, \dot{g}, g) \in \mathbb{R}^{n \times p}$ bir regresyon matrisidir ve $\theta \in \mathbb{R}^p$ sabit sistem parametrelerini belirtir.

Ayrıca, (13) ile ifade edilen alt görev takip hatasının, filtrelenmiş takip hatası regüle edilerek kontrol edilebileceği gösterilebilir. Bunun için, (16)'yi $(I_n - J^+J)$ ile önden çarpılarak ve denklem (6)'da verilen özellikleri kullanarak aşağıdaki ifade elde edilmektedir

$$e_N = (I_n - J^+J)r. \quad (20)$$

Denklem (20) incelendiğinde, filtrelenmiş takip hatası $r(t)$ kontrol edildiğinde, alt görev takip hatası $e_N(t)$ 'nin de kontrol edilebileceği açıkça görülmektedir. Sonuç olarak, alt görev kontrolünün etkili bir şekilde gerçekleştirileceği gösterilmiştir.

4. Kontrol Tasarımı

Yukarıdaki hata sistemine ve takip eden kararlılık analizine dayanarak, $\tau(t)$ kontrol girişi şu şekilde tasarlanmıştır

$$\tau = Y\theta + K_r r + J^T K_e e, \quad (21)$$

burada $K_r \in \mathbb{R}^{n \times n}$, köşegen sabit kontrolcü kazanç matrisidir ve $K_e \in \mathbb{R}^{m \times m}$ kısıt kontrol kazanç matrisi, şu şekilde tanımlanır

$$K_e = \text{diag} \left\{ \frac{k_{ei}}{\Delta_i^2 - e_i^2} \right\}, \quad (22)$$

k_{ei} , $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ sabit kontrolcü kazançlarıdır ve Δ_i (11)'de tanımlandığı gibi görev alanının her bir boyutu için hata kısıtlarıdır. Takip hatasına bağlı kontrol kazancı matrisi K_e 'nin tanıtılması, bu çalışmanın literatürdeki benzer geçmiş araştırmalardan temel farkıdır. Analizden elde ettiğimiz bu K_e kazancı tasarımı, pozisyon hatasının belirli sınırlar içerisinde tutulmasını garanti etmektedir.

5. Kararlılık Analizi

Teorem: Denklem (21)'deki kontrolcü ve (22)'teki takip hatasına bağlı kontrol kazanç matrisi, robot manipülatörün matematiksel modeli (7) için hem görev alanı takip hatasının hem de alt görev takip hatasının orijine eksponansiyel yakınsamasını sağlar. Ayrıca, görev alanı takip hatasının önceden belirlenmiş sınırlar içinde kalmasını sağlar ve kapalı döngü sistemdeki tüm sinyallerin sınırlı kalmasını garanti ederek kapalı döngü kararlılığı oluşturur.

İspat: Aşağıdaki aday Lyapunov fonksiyonunu tanıtarak yukarıda bahsedilen teoremin ispatına başlıyoruz

$$V = \frac{1}{2} r^T M(q) r + \sum_{i=1}^m \frac{k_{ei}}{2} \ln \left(\frac{\Delta_i^2}{\Delta_i^2 - e_i^2} \right), \quad (23)$$

burada $V(r, e)$, pozitif tanımlı ve radyal olarak sınırsız olan bir skaler fonksiyondur. Ayrıca, hata teriminin başlangıç durumu $|e_i(0)| < \Delta_i$, $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ eşitsizliğine uygun sağlanır. (23)'ün zamana göre türevi alınıp $r(t)$ 'nin açık döngü dinamiği (18) eklendiğinde ve denklem (22)'teki K_e yerine konduğunda,

$$\dot{V} = \frac{1}{2} r^T \dot{M}(q) r + r^T \{-V_m(q, \dot{q})r + Y\theta - \tau\} + e^T K_e \dot{e} \quad (24)$$

elde edilir. Modelin çarpık simetri özelliği (9)'u kullanarak, kontrolcüyü ekleyerek ve ortak terimleri iptal ederek aşağıdaki denklem elde edilir

$$\dot{V} = -r^T K_r r - r^T J^T K_e e + e^T K_e \dot{e}. \quad (25)$$

Denklem (17) ile verilen $\dot{e}(t)$ yerine konduğunda, Lyapunov fonksiyonunun türevi

$$\dot{V} = -r^T K_r r - e^T K_e \alpha e \quad (26)$$

şeklinde elde edilir ve bu ifade normlar yardımıyla aşağıdaki şekilde sınırlandırılabilir

$$\dot{V} \leq -K_r \|r\|^2 - \sum_{i=1}^m \alpha_i \|e_i\|^2 \frac{k_{ei}}{\Delta_i^2 - e_i^2}. \quad (27)$$

Son olarak, β ve x değişkenleri aşağıdaki gibi tanımlandığında

$$\beta \triangleq \min \left\{ \lambda_{\min}(K_r), \min \left\{ \alpha_i \frac{k_{ei}}{\Delta_i^2 - e_i^2} \right\}_{i \in \{1, 2, \dots, m\}} \right\}$$

$$x \triangleq \begin{bmatrix} r^T & e^T \end{bmatrix}^T$$

Lyapunov fonksiyonu (23)'ün zamana göre türevinin

$$\dot{V} \leq -\beta \|x\|^2 \quad (28)$$

şeklinde üstten sınırlı olduğu gösterilebilir.

(23) ve (28) yapısına bakıldığında, standart Lyapunov argümanlarını kullanarak $e(t)$ ve $r(t)$ 'nin sınırlı olduğu ve eksponansiyel olarak orijine yakınsadığı gösterilebilir. $x_d(t)$, $\dot{x}_d(t)$, $\ddot{x}_d(t)$, $g(t)$, ve $\dot{g}(t)$ 'nin sınırlı olduğu varsayımı ve $M(q)$, $V_m(q, \dot{q})$, $G(q)$, $J(q)$ ve $J^+(q)$ ile gösterilen kinematik ve dinamik terimlerin sınırlı olduğu gerçeğini kullanarak olası tüm $q(t)$ 'ler için tüm sinyallerin sınırlı olduğu gösterilebilir. Ayrıca, (20)'den $e_N(t)$ 'nin de bir eksponansiyel zarf ile sınırlı olduğu görülebilir.

Önerilen Lyapunov fonksiyonu (23)'ün ikinci bileşeni, pozisyon takip hatası $e(t)$ üzerine önceden tanımlanmış kısıtlar uygulamak için tasarlanmıştır. Şekil (1)'de görüldüğü gibi, (23)'ün bahsi geçen bu logaritmik bileşeni (y eksen), argümanı olan $e(t)$ hata sinyali (x eksen) önceden tanımlanmış kısıt Δ 'ya yaklaştıkça sonsuz büyüme göstermektedir. Başlangıç hata sinyali elemanları $e_i(0)$ önceden tanımlanmış ($-\Delta_i, +\Delta_i$) sınırları içinde seçildiğinde, hata elemanları $e_i(t)$ her zaman bu sınırlar içinde kalacak ve sıfıra yakınsayacaklardır [2]. ■

6. Simülasyon Çalışmaları

Simülasyon çalışmalarında 3 döner eklem sahip düzlemsel bir robot modeli kullanılmıştır ve bu modelin matrisleri

$$M(q) = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix},$$

$$V_m(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} V_{m11} & V_{m12} & V_{m13} \\ V_{m21} & V_{m22} & V_{m23} \\ V_{m31} & V_{m32} & V_{m33} \end{bmatrix},$$

$$F(\dot{q}) = \begin{bmatrix} f_{d1} & 0 & 0 \\ 0 & f_{d2} & 0 \\ 0 & 0 & f_{d3} \end{bmatrix}$$

şeklinde. Atalet matrisi elemanları M_{ij} , ($i, j \in 1, 2, 3$) ve merkezci-Coriolis matrisinin elemanları V_{mij} , ($i, j \in 1, 2, 3$) aşağıdaki gibidir

$$\begin{aligned} M_{11} &= \beta_1 + 2p_1c_2 + p_2c_{23} + p_3c_3 & M_{22} &= \beta_2 + 2p_3c_3 \\ M_{12} &= \beta_2 + p_1c_2 + p_2c_{23} & M_{23} &= \beta_3 + p_3c_3 \\ M_{13} &= \beta_3 + p_2c_{23} + p_3c_3 & M_{33} &= \beta_3 \\ V_{m11} &= -(p_1s_2 + p_2s_{23})\dot{q}_2 - (p_2s_{23} + p_3s_3)\dot{q}_3 \\ V_{m12} &= -(p_1s_2 + p_2s_{23})(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) - (p_2s_{23} + p_3s_3)\dot{q}_3 \\ V_{m13} &= (p_2s_{23} + p_3s_3)(-\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) \\ V_{m21} &= (p_1s_2 + p_2s_{23})\dot{q}_1 + (p_3s_3)\dot{q}_3 \\ V_{m22} &= -(p_2s_{23} + p_3s_3)\dot{q}_3 \\ V_{m23} &= -p_3s_3(3\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) \\ V_{m31} &= (p_1s_2 + p_2s_{23})\dot{q}_1 - (p_3s_3)\dot{q}_2 \\ V_{m32} &= p_3s_3(3\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ V_{m33} &= 0, \end{aligned}$$

burada $kg.m^2$ birimiyle, $\beta_1, \beta_2, \beta_3, p_1, p_2$ ve p_3 kütle parametrelerini (yani, eklemlerin kütleleri, her eklem kütle merkezi, eklem uzunlukları) belirtir. c_i, s_i, c_{ij}, s_{ij} ise, sırasıyla $\cos(q_i), \sin(q_i), \cos(q_i + q_j)$ ve $\sin(q_i + q_j)$ 'yi temsil eder. f_{d1}, f_{d2} ve f_{d3} , $Nm.sn$ birimiyle, dinamik sürtünme katsayılarını belirtir. Çalışmalarımızda, 1, 2 ve 3 numaralı eklemlerin kütleleri sırasıyla 3.6 kg , 2.6 kg ve 2 kg olarak seçilmiştir. Karşılık gelen eklem uzunlukları sırasıyla 0.4 m , 0.36 m , 0.3 m olarak seçilip her bir eklem ağırlık merkezi kendilerinin orta noktası olacak şekilde belirlenmiştir. Yukarıdaki sayısal değerler göz önüne alınarak, simülasyonlarda kütle ve sürtünme parametreleri için aşağıdaki değerler

kullanılmıştır

$$\begin{aligned} \beta_1 &= 1.1956 & \beta_2 &= 0.3946 & \beta_3 &= 0.0512 \\ p_1 &= 0.4752 & p_2 &= 0.1280 & p_3 &= 0.1152 \\ f_{d1} &= 5.3 & f_{d2} &= 2.4 & f_{d3} &= 1.1 \end{aligned} \quad (29)$$

ve (18)'da tanımlanan sabit sistem parametreleri aşağıdaki gibi oluşturulmuştur

$$\theta = [\beta_1 \ \beta_2 \ \beta_3 \ p_1 \ p_2 \ p_3 \ f_{d1} \ f_{d2} \ f_{d3}]^T.$$

Eklem pozisyonlarının başlangıç değerleri

$$q_1 = -0.2 \text{ rad}, \quad q_2 = 1.4 \text{ rad}, \quad q_3 = 1.4 \text{ rad} \quad (30)$$

şeklinde seçilmiştir. Simülasyonlar için istenilen görev alanı yö-rüngesi aşağıdaki gibi seçilmiştir

$$x_d(t) = \begin{bmatrix} 0.3 + 0.2\cos(t)(1 - e^{-0.3t^3}) \\ 0.4 + 0.1\sin(t)(1 - e^{-0.3t^3}) \end{bmatrix}. \quad (31)$$

Simülasyonlarda alt görev kontrol vektörü $g(t)$, [19]'daki gibi aşağıdaki şekilde seçilmiştir

$$g = -2(q_3 - q_2 + 0.5q_1)[1 \ -1 \ 1]^T, \quad (32)$$

buradaki $g(t)$ aşağıdaki fonksiyonun negatif gradyanıdır

$$f = ((q_3 - 0.5q_2) - 0.5(q_2 - q_1))^2, \quad (33)$$

bu nedenle, tasarlanan kontrolcü $(q_3 - 0.5q_2) = 0.5(q_2 - q_1)$ ile sağlanan optimum eklem konfigürasyonunu garanti etmeye çalışır. Kontrolcü kazançları aşağıdaki şekilde seçilmiştir

$$\alpha = \text{diag}\{5 \ 5\}, \quad K_r = 40I_3, \quad k_e = I_2.$$

Üç farklı simülasyon çalışması gerçekleştirilmiştir. Bu çalışmalarındaki tek fark, görev uzayı takip hatası için farklı Δ kısıtları seçimidir. Seçilen kısıtlar şu şekildedir

- $\Delta_a = \text{diag}\{3.5 \ 1.5\}$ [cm]: e_1 her zaman ± 3.5 cm, e_2 ise ± 1.5 cm içinde tutulmalıdır.
- $\Delta_b = \text{diag}\{7 \ 3\}$ [cm]: e_1 her zaman ± 7 cm, e_2 ise ± 3 cm içinde tutulmalıdır.
- $\Delta_c = \text{Kısıtsız}$ ($K_e = 1$): Kontrolcü (21)'nin hataya bağlı kazanç matrisi K_e hata değerlerine göre değişmez.

Bu seçimlerle kontrolcü (21)'nin hataya bağlı kazanç matrisi K_e , hata değerlerine göre değişerek hataların kısıt seçimi ile belirlenmiş sınırlar içinde tutulmasını sağlar. Eklem başlangıç pozisyonları (30)'deki gibi en sıkı Δ seçimi için bile takip hatasının kısıtlı bölgelerin içinde başlayacağı şekilde seçilmiştir.

Tablo 1, sistemdeki geçici durum kontrolcü eforlarını \mathcal{L}_2 normları şeklinde göstermektedir. Kısıtlama sıkılaştıkça, genel kontrol eforunun arttığı gözlemlenmiştir. Başlangıç eklem pozisyonları sabit kaldığından, Δ kısıtlaması sıkılaştıkça kontrolcü hataları daha agresif bir şekilde sınırlardan uzaklaştırmaya çalışmaktadır. Tablo 2'de, sistem kararlı durumdayken kontrolcü eforlarının \mathcal{L}_2 normları sunulmuştur. Kararlı durumda, kontrolcü eforunda önemli bir değişiklik olmadığı gözlemlenmiştir. Sabit durumda, seçilen kısıtlara göre tüm hatalar yeterince küçük olduğu için kontrolcü, neredeyse tüm simülasyonlarda aynı çabayı uygulamaktadır.

Farklı kısıt değerleriyle gerçekleştirilen bu üç simülasyon çalışması için istenilen ve gerçek yörünge hareketleri şekil (2)'de verilmektedir. Burada, kısıt ne kadar dar ise, yörüngeler arasındaki farkın o kadar hızlı kapandığı ve simülasyon boyunca daha sıkı bir takibin gerçekleştiği gözlemlenmektedir. Şekil (3)'te ise, görev uzayı takip hataları sunulmaktadır ve uygulanan kısıt ne kadar sıkıysa hatanın o kadar az olduğu görülmektedir. Bu üç çalışma, pozisyon hatası üzerine uygulanan kısıt sıkılaştıkça geçici durum kontrolcü eforu artarken, pozisyon hatasının azaldığını yörünge takibinin iyileştiğini göstermiştir. Ayrıca, hata önceden belirlenen Δ sınırları içerisinde başladığı süreçte, önerilen kontrolcü kısıtların aşılmamasını garanti etmektedir.

Tablo 1: Tork girişlerinin 0 – 5 saniye aralığındaki \mathcal{L}_2 normu

	Δ_a	Δ_b	Δ_c
$\{\int_0^5 \tau_1(t)dt\}^{1/2}$	122.6862	95.4428	83.1844
$\{\int_0^5 \tau_2(t)dt\}^{1/2}$	62.2690	38.4062	31.7131
$\{\int_0^5 \tau_3(t)dt\}^{1/2}$	32.3861	10.7952	10.8450

Tablo 2: Tork girişlerinin 55 – 60 saniye aralığındaki \mathcal{L}_2 normu

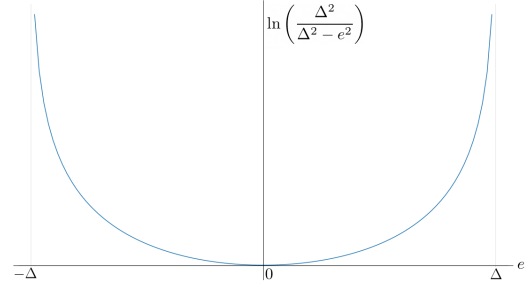
	Δ_a	Δ_b	Δ_c
$\{\int_{55}^{60} \tau_1(t)dt\}^{1/2}$	57.7301	58.0928	58.2452
$\{\int_{55}^{60} \tau_2(t)dt\}^{1/2}$	26.5741	26.2732	25.6345
$\{\int_{55}^{60} \tau_3(t)dt\}^{1/2}$	12.3273	12.1632	11.8456

7. Sonuçlar

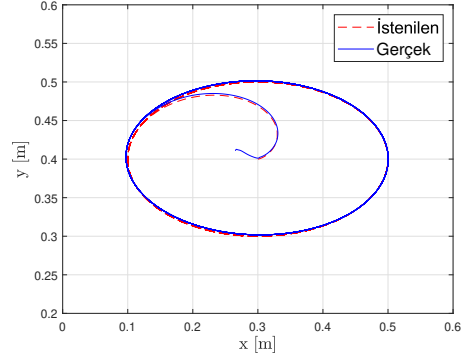
Bu çalışmada, kinematik fazlalıklı robot manipülatörler için, görev alanı pozisyon takip hatasını önceden belirlenen kısıtlar içerisinde tutan, model tabanlı adaptif bir kontrolcü tasarımı ve ilgili kararlılık analizini sunduk. Özellikle, başlangıç uç efektör pozisyon takip hatası önceden belirlenen bölge içinde başlatıldığında, önerilen kontrolcü yöntemi, uç efektör takip hatasının bu bölge içinde kalmasını ve eksponansiyel olarak sifıra yaklaşmasını sağlamaktadır. Pozisyon takip hatası terimine uygulanan kısıtlama, görev uzayı takip hatası için öngörülebilir bir sinyal aşımı ve önceden belirlenmiş bir geçici cevap performansı sağlamaktadır. Kapalı döngü sisteminin kararlılığı ve yakınsaması, BLF tabanlı bir argümanla ispat edilmiştir. Ayrıca tasarlanan kontrol stratejisi, manipülatörün jacobî matrisinin sözde tersini kullanmakta ve bu sayede ters kinematik hesabı problemimini elimine etmektedir. Önerilen yöntemin uygulanabilirliğini ve etkinliğini göstermek için simülasyon çalışmaları yapılmıştır.

8. Kaynakça

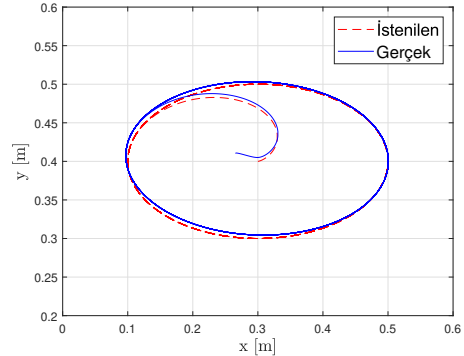
- [1] K. B. Ngo, R. Mahony, and Z. P. Jiang, "Integrator backstepping using barrier functions for systems with multiple state constraints," in *Proc. of the 44th Conf. Decision and Control*, Seville, Spain, 2005, pp. 8306–8312.
- [2] K. P. Tee, S. S. Ge, and E. H. Tay, "Barrier lyapunov functions for the control of output-constrained nonlinear systems," *Automatica*, vol. 45, no. 4, pp. 918–927, 2009.



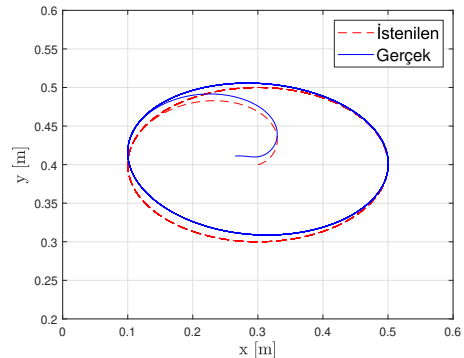
Şekil 1: $V(\cdot)$ 'nin logaritmik bileşeni ve $e(t)$ 'nin ilişkisi



(a) Kısıt seçimi $\Delta = \text{diag}\{3.5 \ 1.5\}[cm]$ iken

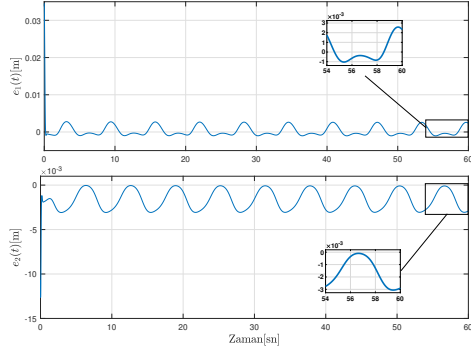


(b) Kısıt seçimi $\Delta = \text{diag}\{7 \ 3\}[cm]$ iken

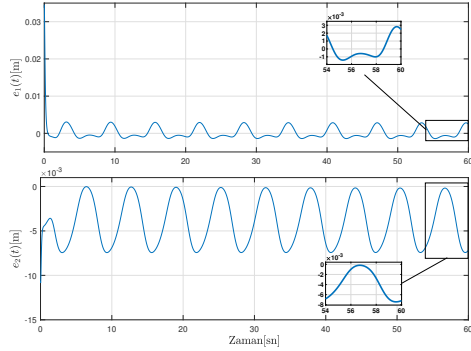


(c) Kısıt yok iken ($K_e = 1$)

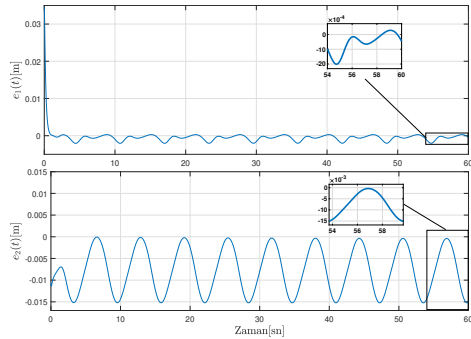
Şekil 2: Farklı kısıt seçimlerinin gerçek yörünge hareketi üzerine etkisi



(a) Kısıt seçimi $\Delta = \text{diag}\{3.5 \ 1.5\} [cm]$ iken



(b) Kısıt seçimi $\Delta = \text{diag}\{7 \ 3\} [cm]$ iken



(c) Kısıt yok iken ($K_e = 1$)

Şekil 3: Farklı kısıt seçimlerinin görev uzayı pozisyon takip hatası üzerine etkisi

- [3] K. P. Tee, B. Ren, and S. S. Ge, “Control of nonlinear systems with time-varying output constraints,” *Automatica*, vol. 47, no. 11, pp. 2511–2516, 2011.
- [4] Y. J. Liu and S. C. Tong, “Barrier Lyapunov functions-based adaptive control for a class of nonlinear pure-feedback systems with full state constraints,” *Automatica*, vol. 64, pp. 70–75, 2016.
- [5] C. Wang, Y. Wu, and J. Yu, “Barrier Lyapunov functions-based adaptive control for nonlinear pure-feedback systems with time-varying full state constraints,” *International Journal of Control, Automation and Systems*, vol. 15, no. 6, pp. 2714–2722, 2017.
- [6] A. L’Afflitto, “Barrier Lyapunov functions and constrained model reference adaptive control,” *IEEE Control Systems Letters*, vol. 2, no. 3, pp. 441–446, 2018.
- [7] Jacek Kabzinski, Przemysław Mosiołek, and Marcin Jastrzbski, “Adaptive position tracking with hard constraints—barrier Lyapunov functions approach,” in *Advanced Control of Electrical Drives and Power Electronic Converters*, pp. 27–52. Springer, 2017.
- [8] Shuang Zhang, Yiting Dong, Yuncheng Ouyang, Zhao Yin, and Kaixiang Peng, “Adaptive neural control for robotic manipulators with output constraints and uncertainties,” *IEEE Tr. on Neural Networks and Learning Systems*, vol. 29, no. 11, pp. 5554–5564, 2018.
- [9] Karla Rincon, Isaac Chairez, and Wen Yu, “Fixed-time robust output feedback control of a restricted state biped robot based on a tangent barrier lyapunov function,” in *Int. Conf. on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control*, Mexico City, Mexico, 2019.
- [10] W. He, Z. Yin, and C. Sun, “Adaptive neural network control of a marine vessel with constraints using the asymmetric barrier lyapunov function,” *IEEE Tr. on Cybernetics*, vol. 47, no. 7, pp. 1641–1651, 2019.
- [11] Guoqing Xia, Chuang Sun, Bo Zhao, Xiaoming Xia, and Xianxin Sun, “Neuroadaptive distributed output feedback tracking control for multiple marine surface vessels with input and output constraints,” *IEEE Access*, vol. 7, pp. 123076–123085, 2019.
- [12] Yuan-Xin Li, “Barrier lyapunov function-based adaptive asymptotic tracking of nonlinear systems with unknown virtual control coefficients,” *Automatica*, vol. 121, pp. 109181, 2020.
- [13] David Cruz-Ortiz, Isaac Chairez, and Alexander Poznyak, “Non-singular terminal sliding-mode control for a manipulator robot using a barrier lyapunov function,” *ISA transactions*, vol. 121, pp. 268–283, 2022.
- [14] Hadi Jahanshahi, Qijia Yao, Muhammad Ijaz Khan, and Irene Moroz, “Unified neural output-constrained control for space manipulator using tan-type barrier lyapunov function,” *Advances in Space Research*, vol. 71, no. 9, pp. 3712–3722, 2023.
- [15] Samet Gul, Erkan Zergeroglu, Enver Tatlicioglu, and Me-sih Veysi Kilinc, “Desired model compensation-based position constrained control of robotic manipulators,” *Robotica*, vol. 40, no. 2, pp. 279–293, 2022.
- [16] Samet Gul, Erkan Zergeroglu, and Enver Tatlicioglu, “Position tracking constrained adaptive output feedback control of robotic manipulators,” *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, vol. 144, no. 11, pp. 111006, 2022.
- [17] Y. Nakamura, *Advanced robotics: redundancy and optimization*, Addison-Wesley, 1991.
- [18] F. L. Lewis, D. M. Dawson, and C. T. Abdallah, *Robot Manipulator Control: Theory and Practice*, Marcel Dekker, Inc., New York, NY, USA, 2004.
- [19] Ping Hsu, John Mauser, and Shankar Sastry, “Dynamic control of redundant manipulators,” *Journal of Robotic Systems*, vol. 6, no. 2, pp. 133–148, 1989.