

Taktik Hava Araçları İçin Minimum-zamanlı Model Öngörülü Yörünge Planlama Yaklaşımı

Minimum-time Model Predictive Trajectory Planning Approach for Tactical Aerial Vehicles

Ramazan K. Gedik¹, Oğuz Han Altıntaş²

^{1,2}İleri Teknolojiler ve Sistemler Genel Müdür Yardımcılığı
Roketsan A.Ş., Ankara, Türkiye

{kursat.gedik, han.altintas}@roketsan.com.tr

Özetçe

Bu çalışmada taktik hava araçları için konumu bilinen bir hedefe dinamik girdi ve durum kısıtları altında minimum zamanda ulaşmayı sağlayan model öngörülü yörünge planlama yaklaşımı sunulmaktadır. Literatürdeki yaklaşımlara göre formülasyonda ve optimizasyon adımlarında daha maliyet-etkin bir yaklaşım sergilenmekte ve bu öne sürülen yaklaşımın kararlılığı incelenmektedir. Yöntem, döner kanatlı ve sabit kanatlı hava aracı modelleri için zorlayıcı engellere sahip parkurlarda, değişken durum ve girdi kısıtları altında test edilmekte ve sonuçları sunulmaktadır.

Abstract

In this study, a model predictive trajectory planning approach is proposed to guide tactical aerial vehicles to a predefined destination in the presence of dynamical input and state constraints. A more cost-effective approach is adopted in the formulation and optimization steps, and the stability of this proposed approach is investigated. The method is tested and the results are presented in challenging obstacle courses for both rotary-wing and fixed-wing aircraft models, under varying state and input constraints.

1. Giriş

Taktik hava araçları günümüz sivil ve askeri teknolojilerinde insanlı ve insansız pek çok görevde kullanılmaktadır. Bu görevler çoğunlukla faydalı yükleri bir noktadan başka bir noktaya en kısa sürede güvenli bir şekilde taşımak üzerine kurgulanmaktadır. Sivil görevler kalabalık şehir içi bölgelerde kısa süreli kargo taşımaları, arama-kurtarma görevleri ve geniş çaplı yapıların taranması ve benzeri görevlerden oluşmaktadır. Öte yandan askeri görevler ise yine arama-kurtarma olabileceği gibi meskun mahal, mağara ve vadi ortamlarında savunma ve taarruz amaçlı görevlerden oluşmaktadır. Bu görevlerin icra yerleri düşünüldüğünde, insansız bir taktik hava aracı görevi başarıyla yerine getirebilmek için kinematik durum kısıtlarına maruz kalmaktadır. Tüm bu kısıtların mevcudiyetinde ise görev olabildiğince

hızlı bir şekilde tamamlanmaya, operasyon maliyetleri azaltılmaya ve hatta hayatlar kurtarılmaya çalışılmaktadır. Bu nedenle insansız hava araçları (İHA), hem dinamik kısıtları gözetecek hem de minimum zamanda görevi icra edecek şekilde belirlenen yörüngelerde uçurulmaya çalışılmaktadır.

Belli bir amaç fonksiyonunu (İng. *objective function*) farklı dinamik ve statik kısıtlar altında ekstremlere ederken buna göre hareketi planlayan kontrolcüler optimal kontrol konusu altında incelenmektedir. Bu kontrolcüler kısıtların veya değişkenlerin çok olduğu ve daha genel durumlar için nümerik çözümlerle sentezlenmektedir. Bunlardan bir grubu ise Model Öngörülü Kontrol (İng. *Model Predictive Control*, MPC) tabanlı çözümlerdir [1, 2].

Hava araçları için MPC tabanlı çözümler geniş bir literatüre sahip olup farklı amaçlarla kullanılmaktadır. Hareket halindeyken engellerden kaçınma ve çarpışma önleme gibi çalışmalar İHA'lar özelinde sıklıkla incelenmekte [3] ve bilinmeyen ortamlarda dahi engellere karşı reaktif MPC yaklaşımları sunulmaktadır [4]. Optimizasyon probleminin duruma göre uyarlanması ile doğrusal olmayan MPC yaklaşımları bile gerçek-zamanlı kullanılabilir [5]. MPC sınır koşulları gözetilerek çözüldüğünde ise kooperatif İHA ve kara aracı senaryoları görmek mümkün olmaktadır [6]. Öte yandan İHA'larda MPC ile engellerden kaçınma ve yörünge planlamanın derin öğrenme ve pekiştirmeli öğrenme konularında da genişleyen bir araştırması vardır [7, 8]. MPC formülasyonları, İHA ve füzeler özelinde bir güdüm metodu olarak da ele alınmaktadır. Bu bağlamda vuruş açısı ve zamanı kontrolü [9], entegre güdüm-otopilot yapısı [10], parametre kestirimi tabanlı dinamik süzülme [11] gibi çalışmalara rastlanabilir. Son olarak engellerden kaçınmanın MPC ile stokastik engeller varlığında da yapılabileceğini gösteren çalışmalar vardır [12].

Ayrılc zamanlı sistemler için MPC ile minimum-zamanlı kontrol yaklaşımına dair detaylı [13] çalışması mevcut olup yörünge bilgisinin MPC formülasyonuna dahil edilmesiyle minimum-zamanlı kontrolün elde edilebileceğini gösteren [14, 15] vardır. Yine döner kanatlı İHA'lar özelinde ise minimum-zamanlı MPC yaklaşımlarına rastlamak mümkündür [16].

2. Ön Bilgiler

Bu bölümde öncelikli olarak MPC problemlerinin nümerik çözüm alt yapısını oluşturan İkinci Mertebe Programlama'nın (İng. *Quadratic Programming*, QP) girizgahı yapılmakta ve bu tür optimizasyon problemlerinin çözümü özetlenmektedir. Daha sonrasında ise genel kabul görmüş MPC formülasyonları verilmekte ve QP problemi olarak nasıl ele alındığı anlatılmaktadır.

2.1. İkinci Mertebe Programlama

Tanım 2.1. *Farz edilsin amaç fonksiyonu $J \in C^2$, minimizasyon problemi (P1)*

$$\begin{aligned} \text{minimize } J(\mathbf{u}) &= \frac{1}{2} \mathbf{u}^\top Q \mathbf{u} + \mathbf{c}^\top \mathbf{u} + \alpha \\ \text{öyle ki } \mathbf{u} &\in \Omega \end{aligned}$$

ve $\mathbf{u}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n, Q \in \mathbb{S}_+^n, \alpha \in \mathbb{R}$ olsun. Ayrıca yarı-düzlemlerle tanımlanan uygun küme ise $\Omega = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n : A\mathbf{u} \leq \mathbf{b}\}$ olsun. O halde, (P1) gradyanı $\nabla J(\mathbf{u}) = Q\mathbf{u} + \mathbf{c}$ ve Hessian'ı $\nabla^2 J(\mathbf{u}) = Q$ olan ikinci mertebe bir minimizasyon problemi-dir.

Problem (P1) için uygun küme (İng. *feasible set*), \mathbb{R}^n uzayında kapalı ve sınırlı bir küme tanımladığında çözüm var olacaktır. Bu çözümün tekliği ve minimize edici olması ise Q matrisinin pozitif tanımlı olmasına bağlıdır.

Bu tür problemlerin çözümü için zengin bir literatür mevcuttur ve yaygın olarak kullanılan yaklaşımlar genellikle iç nokta (İng. *interior point*) ve aktif-küme (İng. *active-set*) yöntemleridir. Aktif-küme yöntemleri özetle, optimum çözümün uygun bölge içerisinde olmaması durumunda Ω çokyüzlüsünün hangi köşesi veya yüzü üzerinde yer alacağını belirlemek üzerine kuruludur [17].

Tanım 2.2. *Problem (P1) ele alındığında; \mathbf{u} noktasındaki eşitsizlik kısıtı $A_1 \mathbf{u} = \mathbf{b}_1$ şeklinde eşitlik olarak sağlanıyorsa aktif-tir ve A_1, \mathbf{b}_1 matrisleri aktif eşitsizlik kısıtlarına karşılık gelen alt matrislerdir. Eğer bir eşitsizlik kısıtı aktif değilse inaktiftir.*

Problem (P1) için Lagrange fonksiyonu $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ aşağıdaki şekilde tanımlanmakta olup

$$L(\mathbf{u}, \lambda) = \frac{1}{2} \mathbf{u}^\top Q \mathbf{u} + \mathbf{c}^\top \mathbf{u} + \alpha + \lambda^\top (A\mathbf{u} - \mathbf{b}), \quad (1)$$

burada $\lambda \in \mathbb{R}^m$ Lagrange çarpanlarını temsil etmektedir. Bu durumda (P1) için ikincil (İng. *dual*) problem aşağıdaki şekilde tanımlanır.

Tanım 2.3. *Bahsi geçen birincil problem (P1) için ikincil problem (D1)*

$$\begin{aligned} \text{maksimize } q(\lambda) &= -\frac{1}{2} \lambda^\top H \lambda - \mathbf{g}^\top \lambda - \beta \\ \text{öyle ki } \lambda &\geq 0 \end{aligned}$$

ve $H = A Q^{-1} A^\top, \mathbf{g} = \mathbf{b} + A Q^{-1} \mathbf{c}, \beta = 1/2 \mathbf{b}^\top Q^{-1} \mathbf{b}$ olup (D1) optimum değerini aşağıdaki şekilde alır.

$$q(\lambda^*) = \sup_{\lambda \geq 0} \inf_{\mathbf{u}} L(\mathbf{u}, \lambda).$$

Teorem 2.1. *Eğer \mathbf{u}^* çözümü (P1) için uygunsu ve de λ^* çözümü (D1) için uygunsu $q(\lambda^*) \leq J(\mathbf{u}^*)$ olur. Dahası (P1) konveks bir problem ise $q(\lambda^*) = J(\mathbf{u}^*)$ olur.*

Bu teoremle ikililik farkının (İng. *duality gap*) (P1-D1) çözümleri için sıfır olacağını görmek mümkündür. Dolayısıyla ikincil bir aktif-küme yöntemi kullanarak elde edilen (D1) çözümü ile (P1)'in çözümü aynı olacaktır. Bu tercih edilesi bir durumdur zira (D1), kısıtların çok olduğu bir durum için (P1)'e göre çok daha kolay kısıtlar içermektedir.

İkincil aktif-küme tabanlı çözüme ait optimizasyon değişkenleri ve Lagrange çarpanları, aktif kısıt indislerinin kümesi \mathcal{A} için aşağıdaki hali almaktadır [18].

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^* &= -Q^{-1}(\mathbf{c} + A_i^\top \lambda_i^*) \\ \lambda_i^* &= -(A_i Q^{-1} A_i^\top)^{-1}(\mathbf{b}_i + A_i Q^{-1} \mathbf{c}), \quad \forall i \in \mathcal{A}. \end{aligned} \quad (2)$$

2.2. Model Öngörülü Kontrol

Bir dinamik sistemin kontrol ve regülasyonunda MPC formülasyonu, sistemin gelecekteki davranışını kayan bir zaman ufku (İng. *receding horizon*) tahmin eden ve belli bir amaç fonksiyonunu bu tahmine göre optimize eden girdi sekansını belirleyen yöntemlerdir. Genel hatlarıyla bir MPC problemi aşağıdaki şekilde tanımlanabilir [1].

Tanım 2.4. *Farz edilsin amaç fonksiyonu $J \in C^2$ ve Lipschitz-süreklilik durumu uzayı $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ olsun. Bu durumda N -adımlı optimal kontrol problemi (OCPI)*

$$\begin{aligned} \min_{\{\mathbf{u}_0, \dots, \mathbf{u}_{N-1}\}} J(\mathbf{x}_k) &= \ell_f(\mathbf{x}_N) + \sum_{k=0}^{N-1} \ell(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) \\ \text{öyle ki } \mathbf{x}_{k+1} &= f(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k), \\ \mathbf{x}_k &\in \mathcal{X}, \mathbf{u}_k \in \mathcal{U}, \forall k = 1, \dots, N-1, \\ \mathbf{x}_0 &\in \mathcal{X}_0, \mathbf{x}_N \in \mathcal{X}_f \end{aligned}$$

olup $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ durum kısıtları kümesini, $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ kontrol kısıtları kümesini ve $\mathcal{X}_0, \mathcal{X}_f$ sınır koşulları kümelerini tarif eder.

MPC bu haliyle doğrusal olmayan bir optimizasyon problemi olup muhtemelen yine doğrusal olmayan eşitlik ve eşitsizlik kısıtlarına sahiptir. Bu durum nümerik çözümlerin eldesini zorlaştırmaktadır. Alternatif olarak, doğrusal ve muhtemelen konveks olmayan bu problemi ardışık konveks QP alt-problemlerine bölerek çözmek mümkündür. Bu yaklaşımla asimptotik kararlılığın da sağlanabileceği gözlenmektedir [19].

Teorem 2.2. *Farz edilsin ki N -adımlı optimal kontrol problemi (OCP2)*

$$\begin{aligned} \min_{\{\mathbf{u}_0, \dots, \mathbf{u}_{N-1}\}} J(\mathbf{x}_k) &= \sum_{k=0}^{N-1} \|\mathbf{x}_k\|_{R_1}^2 + \|\mathbf{u}_k\|_{R_2}^2 \\ \text{öyle ki } \mathbf{x}_{k+1} &= A\mathbf{x}_k + B\mathbf{u}_k, \\ \mathbf{x}_k &\in \mathcal{X}, \mathbf{u}_k \in \mathcal{U}, \forall k = 1, \dots, N-1, \\ \mathbf{x}_0 &\in \mathcal{X}_0, \mathbf{x}_N = 0 \end{aligned}$$

ve $R_1, R_2 \succ 0$. Eğer problem $k = 0$ adımında uygunsu $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k = 0$ ve $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{u}_k = 0$ olur ve kısıtlar $\forall R_1, R_2 \succ 0$ ve $\forall k \in \mathbb{N}$ için sağlanır.

Kanıt özeti. Varsayalım $\pi_k^* = \{\mathbf{u}_0^*, \mathbf{u}_1^*, \dots, \mathbf{u}_{N-1}^*\}$ k -adımı optimum girdi sekansı olsun. Dolayısıyla $k+1$ -adımı optimum girdi sekansı ise $\pi_{k+1}^* = \{\mathbf{u}_1^*, \mathbf{u}_2^*, \dots, 0\}$ ve uygun olacaktır. $k+1$ -adımı girdi sekansı (OCP2)'ye uygulandığında ise optimallik prensibi gereği $J^*(\mathbf{x}_k) \geq \|\mathbf{x}_k\|_{R_1}^2 + \|\mathbf{u}_k\|_{R_2}^2 + J^*(\mathbf{x}_{k+1})$, $\forall k \in \mathbb{N}$ olacaktır. Optimum amaç fonksiyonu azalan ve alttan sınırlandırılmış bir fonksiyon olduğu için bir limit noktaya sahip ve $\lim_{k \rightarrow \infty} J^*(\mathbf{x}_k) < \infty$ olacaktır. Dahası $\forall k \in \mathbb{N}$ için $J^*(\mathbf{x}_k) - J^*(\mathbf{x}_{k+1}) \geq \|\mathbf{x}_k\|_{R_1}^2 + \|\mathbf{u}_k\|_{R_2}^2 > \epsilon > 0$ olup, $R_1, R_2 \succ 0$ olduğu için $k \rightarrow \infty$ müddetince $\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k \rightarrow 0$ ve $\epsilon \rightarrow 0$ olacaktır. \square

3. Minimum-zamanlı Model Öngörülü Kontrol

Bu kısımda (OCP1) tanımlarına sadık kalınarak ve (OCP2)'dekine benzer amaç fonksiyonu, kısıt ve kararlılık sonuçları türetilerek sistem dinamiğine ait durum yörüngelerinin, girdi ve durum kısıtları altında, en kısa zamanda istenilen noktalara evrilmesi formüle edilmiştir.

Farz edelim Lipschitz-sürekli fonksiyonlar $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ ve $h: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ olsun. Bu durumda ayrık-zamanlı

$$\mathbf{x}_{k+1} = f(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k), \quad \mathbf{y}_k = h(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k), \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (3)$$

dinamik sistemine ait $k \in \mathbb{N}$ adımıdaki durumlar $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$, girdiler $\mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^m$ ve çıktılar $\mathbf{y}_k \in \mathbb{R}^p$ olsun. Bu durumda, dinamik sistemin belirlenen denge noktalarındaki doğrusal durum uzayı gösterimi

$$\mathbf{x}_{k+1} = A_d \mathbf{x}_k + B_d \mathbf{u}_k, \quad \mathbf{y}_k = C_d \mathbf{x}_k + D_d \mathbf{u}_k, \quad (4)$$

olup, $A_d \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_d \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C_d \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ve $D_d \in \mathbb{R}^{p \times m}$ şeklinde durum uzayı matrisleridir. Bu noktada minimum-zamanlı kayan ufuklu optimal kontrol problemi aşağıdaki şekilde öne sürülmektedir.

Önerme 3.1. N -adımlı minimum-zamanlı optimal kontrol problemi (OCP3)

$$\min_{\{\mathbf{u}_0, \dots, \mathbf{u}_{N-1}\}} J(t_k, \mathbf{x}_k) = t_N + \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\epsilon}{2} \|\mathbf{u}_k\|_2^2$$

öyle ki $\forall k = 1, \dots, N-1$ için

$$\mathbf{x}_{k+1} = A_d \mathbf{x}_k + B_d \mathbf{u}_k,$$

$$t_{k+1} = t_k + h_k,$$

$$\mathbf{x}_k \in \mathcal{X}, \quad \mathbf{u}_k \in \mathcal{U}, \quad t_k \in \mathcal{T} \subset \mathbb{R}_+,$$

$$\mathbf{x}_0 \in \mathcal{X}_0, \quad (t_N, \mathbf{x}_N) \in \mathcal{S}_f = \mathcal{T}_f \times \mathcal{X}_f$$

olup, $h_k = t_{k+1} - t_k > 0$ ile $0 < \epsilon \ll 1$ durumunda ve

- (A_d, B_d) ikilisi tam-durum kontrol edilebilirliğine sahiptir,
- sınır koşulları kümesi \mathcal{S}_f değişmez (invariant) bir kümedir ve kapalı-döngü sistem yörüngeleri $\forall k \geq N$ için var olan bir $\mu(\mathbf{x}_k) \equiv 0$ kontrol kanunu ile \mathcal{S}_f üzerinde kalır,
- \mathcal{S}_f üzerinde durumlar $\forall k \geq N$ müddetince uygundur ve $\mu(\mathbf{x}_k) \in \mathcal{U}$,

varsayımları altında sistem yörüngeleri $\forall k \in \mathbb{N}$ için \mathcal{S}_f kümesine asimptotik yakınsar.

Kanıt. Öncelikli olarak MPC'nin özyinelemeli uygunluğu ele alındığında, uygun bir başlangıç durumu \mathbf{x}_0 için optimum girdi sekansı $\pi_k^* = \{\mathbf{u}_0^*, \mathbf{u}_1^*, \dots, \mathbf{u}_{N-1}^*\}$ olup uygun olacaktır. Bir sonraki adımda ise optimum girdi sekansı $\pi_{k+1}^* = \{\mathbf{u}_1^*, \mathbf{u}_2^*, \dots, \mu(\mathbf{x}_N^*)\}$ olacak ve $\mu(\mathbf{x}_k) \in \mathcal{U}$ varsayımı gereği uygunluğunu koruyacaktır. Dolayısıyla MPC herhangi bir uygun başlangıç durumundan sınır koşullarına kadar özyinelemeli uygunluğa sahip olacaktır.

Varsayalım ki amaç fonksiyonunun k -adımındaki optimum girdi sekansı π_k^* için optimum değeri $J^*(t_k, \mathbf{x}_k) = t_N^* + \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\epsilon}{2} \|\mathbf{u}_k^*\|_2^2$ olsun. Bu durumda $k+1$ -adımı için hesaplanacak girdi sekansı π_{k+1}^* ile alt optimal amaç fonksiyonu değeri $J'(t_{k+1}, \mathbf{x}_{k+1}) = t'_{N+1} + \sum_{k=1}^N \frac{\epsilon}{2} \|\mathbf{u}_k^*\|_2^2$ olacaktır. Buna ek olarak optimallik koşulu gereği $J^*(t_k, \mathbf{x}_k) \leq J'(t_k, \mathbf{x}_k)$, $\forall k \in \mathbb{N}$ olmakla beraber ifadeyi aşağıdaki şekilde yazmak da mümkündür.

$$J'(t_{k+1}, \mathbf{x}_{k+1}) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\epsilon}{2} \|\mathbf{u}_k^*\|_2^2 - \frac{\epsilon}{2} \|\mathbf{u}_0^*\|_2^2 + t'_{N+1} + \frac{\epsilon}{2} \|\mu(\mathbf{x}_N^*)\|_2^2 + t_N^* - t_N^*. \quad (5)$$

Bu noktada (5)'teki ilk ve son terimler gruplandığında ilk ifadeyi elde etmek mümkündür ve $J'(t_{k+1}, \mathbf{x}_{k+1}) = J^*(t_k, \mathbf{x}_k) - \frac{\epsilon}{2} \|\mathbf{u}_0^*\|_2^2 + t'_{N+1} + \frac{\epsilon}{2} \|\mu(\mathbf{x}_N^*)\|_2^2 - t_N^*$ olmaktadır. Buradaki son üç terim ele alındığında varsayım gereği sistem yörüngeleri t_N^* anında bir kere \mathcal{S}_f 'e ulaştığında itibaren sonraki $\forall k \geq N$ için t_N^* anında ve \mathbf{x}_N durumunda kalacaktır. Böylelikle ifadenin son üç terimi kaybolacaktır. Tekrar optimallik koşuluna dönecek olursak, $J^*(t_{k+1}, \mathbf{x}_{k+1}) \leq J'(t_{k+1}, \mathbf{x}_{k+1}) = J^*(t_k, \mathbf{x}_k) - \frac{\epsilon}{2} \|\mathbf{u}_0^*\|_2^2$ ve $\forall k \in \mathbb{N}$ için $J^*(t_k, \mathbf{x}_k)$ azalan ve alttan sınırlandırılmış bir fonksiyon olduğu için bir limit noktaya sahip ve $\lim_{k \rightarrow \infty} J^*(t_k, \mathbf{x}_k) < \infty$ olacaktır. Herhangi bir k -adımında uygun olarak başlayan sistem yörüngeleri özyinelemeli uygunluk neticesinde \mathcal{S}_f kümesinde sonlanacaktır. \square

Buradaki minimum-zamanlı MPC problemini nümerik olarak ele almak ve ardışık QP problemi serisi şeklinde çözmek mümkündür. Bunun için öncelikle tahmin modelini tanımlamak gerekmektedir.

Tanım 3.1. Farz edelim (4)'teki dinamik sisteme ait (A_d, B_d) ikilisi tam-durum kontrol edilebilirliğine sahip, $C_d = I_n$ ve $D_d = 0$ olsun. Bu durumda herhangi bir k -adımındaki N -adım öteye doğrusal tahmin modeli

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k+1} \\ \mathbf{x}_{k+2} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{k+N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_d \\ A_d^2 \\ \vdots \\ A_d^N \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} B_d & \dots & 0 \\ A_d B_d & & \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_d^{N-1} B_d & \dots & B_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_k \\ \mathbf{u}_{k+1} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{k+N-1} \end{bmatrix} \quad (6)$$

olur ve aşağıdaki kısa gösterimle tarif edilir.

$$\xi_k = \Phi \mathbf{x}_k + \Gamma \pi_k. \quad (7)$$

Bu tahmin modeli kullanılarak N -adımlı ufuk boyunca girdi ve durum kısıtları yaratmak mümkündür. Oluşacak QP'nin temel optimizasyon değişkeni girdi sekansı π_k olacağı için girdi ve durum kısıtlarını π_k üzerinden yazmak gerekmektedir.

Problem (OCP3)'e denk olarak problem (P2), her k -adımı için girdi ve durumlar üzerindeki rahatlatılmış (İng. *relaxed*) bant kısıtları ile sınır koşulları altında nümerik olarak

$$\begin{aligned} \min_{\pi_k, \mathbf{s}_k, t_k} \quad & t_N + \frac{\varepsilon}{2} \|\pi_k\|_2^2 + \frac{\alpha}{2} \|\mathbf{s}_k\|_2^2 \\ \text{öyle ki} \quad & \forall k = 1, \dots, N-1 \text{ için} \\ & t_{k+1} = t_k + h_k, \\ & \pi_k^l \leq \pi_k \leq \pi_k^u, \\ & A\pi_k + \mathbf{s}_k \leq \xi_k^u - \mathbf{b}_k \\ & A\pi_k - \mathbf{s}_k \geq \xi_k^l - \mathbf{b}_k \\ & \mathbf{s}_k \geq 0, \\ & E\pi_k = \mathbf{f}_k \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilip $\pi_k, \pi_k^l, \pi_k^u \in \mathbb{R}^{N \cdot m}$ girdi sekansını, girdi alt limitlerini ve girdi üst limitlerini; $\mathbf{s}_k, \xi_k^l, \xi_k^u \in \mathbb{R}^{N \cdot n}$ rahatlatma değişkenlerini, durum alt limitlerini ve durum üst limitlerini; $A \in \mathbb{R}^{N \cdot n \times N \cdot m}$, $\mathbf{b}_k \in \mathbb{R}^{N \cdot m}$ girdiden durumlara geçiş matrislerini, $E \in \mathbb{R}^{n \times N \cdot m}$, $\mathbf{f}_k \in \mathbb{R}^n$ girdiden sınır koşullarına geçiş matrislerini ve son olarak $\varepsilon, \alpha > 0$ ise cezalandırma katsayılarını sırasıyla belirtir. Buradaki geçiş matrisleri ise

$$\begin{aligned} A &:= D_1 \Gamma, & \mathbf{b}_k &:= D_1 \Phi \mathbf{x}_k, \\ E &:= D_2 \Gamma, & \mathbf{f}_k &:= \mathbf{x}_k^d - D_2 \Phi \mathbf{x}_k \end{aligned} \quad (8)$$

şeklinde olup D_1 matrisi N -adım ufku boyunca hangi durumların, ne sırayla seçileceğini belirtirken; D_2 matrisi ise N -adım ufku sonunda hangi durumlara sınır koşulu girileceğini belirtmektedir. Buradaki $\mathbf{x}_k^d \in \mathbb{R}^n$ ise kapalı-döngü sistem yörüngelerinin sınır koşulunda sahip olması istenilen değerleridir. Son olarak (P2)'de görülebileceği üzere π_k dolaylı olarak t_k değişkenlerine etki ettiği için her k -adımında çözülmesi gereken indirgenmiş QP problemi aşağıdaki hali almaktadır.

Tanım 3.2. *Problem (OCP3)'ün her k -adımındaki N -adımlı nümerik çözümü,*

$$\begin{aligned} \min_{\pi_k, \mathbf{s}_k} \quad & \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \pi_k \\ \mathbf{s}_k \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} \varepsilon I_{N \cdot m} & 0 \\ 0 & \alpha I_{N \cdot n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_k \\ \mathbf{s}_k \end{bmatrix} \\ \text{öyle ki} \quad & \begin{bmatrix} E & 0 \\ -E & 0 \\ I_{N \cdot m} & 0 \\ -I_{N \cdot m} & 0 \\ A & I_{N \cdot n} \\ -A & I_{N \cdot n} \\ 0 & -I_{N \cdot n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_k \\ \mathbf{s}_k \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \mathbf{f}_k \\ -\mathbf{f}_k \\ \pi_k^u \\ -\pi_k^l \\ \xi_k^u - \mathbf{b}_k \\ -\xi_k^l + \mathbf{b}_k \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

şeklinde ele alınan ardışık eşitsizlik kısıtlamalı (P3) QP problemidir.

Problem (P3), tahmin ufkunun yeteri kadar büyük seçilmesi ve durum-girdi kısıtlarının boyutları neticesinde çok sayıda eşitsizlik kısıtının yer aldığı bir probleme dönüşmektedir. Optimum çözümü her adımda verimli bir şekilde elde edebilmek için (P3), bir önceki kısımda açıklanan (D1) ikincil problem formuna getirilerek ikincil aktif-küme metodlarıyla çözülebilmektedir. Unutulmaması gereken bir detay ise (P3)'e ait matrislerin seyrek (İng. *sparse*) ve yapılı (İng. *structured*) matrisler olmasıdır. Bu seyreklik yapılarını QP çözücüsü içerisinde kullanarak, ardışık QP çözümlerini oldukça verimli hale getirmek mümkündür [20].

4. Modelleme ve Simülasyon Çalışmaları

Önceki bölümde sunulan teorinin uygulaması, farklı hava aracı modelleri için zorlayıcı engel parkurlarında denenmiştir. Döner kanatlı ve sabit kanatlı İHA indirgenmiş modelleri MPC tasarımı ve simülasyonlarında kullanılmıştır.

4.1. Döner Kanatlı İnsansız Hava Aracı

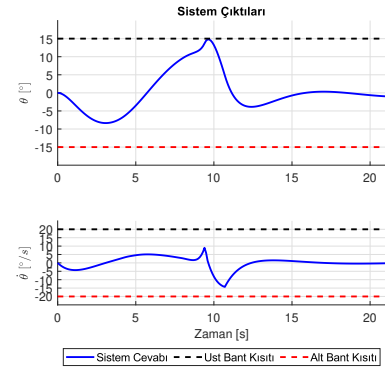
Döner kanatlı bir İHA'nın hareketini düşey düzlemde modellemek için kullanılan diferansiyel denklemler aşağıdaki şekildedir [21].

$$\ddot{x} = -\frac{F_z}{m} \sin \theta, \quad \ddot{z} = -g + \frac{F_z}{m} \cos \theta, \quad \ddot{\theta} = \frac{M_y}{I_{yy}}. \quad (9)$$

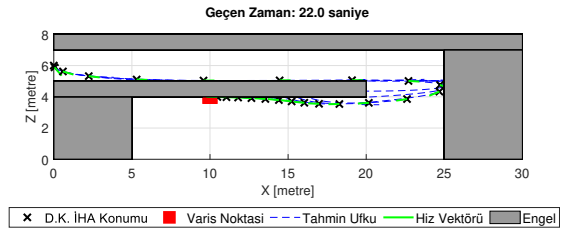
Yukarıdaki (9) denkleminde $x, z \in \mathbb{R}$ ataletsel eksen takımındaki pozisyonu ifade ederken $\theta \in \mathbb{R}$ yönelim açısını gösterir. $F_z \in \mathbb{R}$ gövde ekseninde uygulanan dikey kuvveti, $M_y \in \mathbb{R}$ ise uygulanan momenti ifade eder. $m > 0$ ve $I_{yy} > 0$ sırasıyla kütle ve atalet değeri olarak $g \in \mathbb{R}$ ise yerçekimi ivmesidir. Döner kanatlı İHA simülasyonlarında $g = 9.8 \text{ m/s}^2$, $m = 0.5 \text{ kg}$, $I_{yy} = 0.005 \text{ kgm}^2$ kullanılmaktadır.

MPC kurgusunda örnekleme zamanı $T_s = 0.1 \text{ s}$ ve $N = 40$ olarak seçilmiştir. MPC tasarımında kullanılan üst ve alt kısıt koşulları (10)'te verilmiştir. Engel koşulları alt kısıt olarak $x_{e,a}$ ve $z_{e,a}$ şeklinde ifade edilirken, $x_{u,a}$ ve $z_{u,a}$ engel koşulları üst kısıtı göstermektedir.

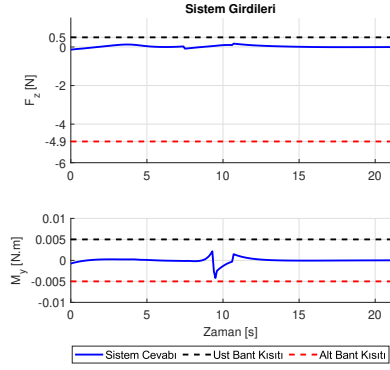
$$\begin{aligned} x_{e,a} &\leq x [m] \leq x_{u,a}, & -6 &\leq \dot{x} [m/s] \leq 6, \\ z_{e,a} &\leq z [m] \leq z_{u,a}, & -6 &\leq \dot{z} [m/s] \leq 6, \\ -15 &\leq \theta [^\circ] \leq 15, & -20 &\leq \dot{\theta} [^\circ/s] \leq 20, \\ -4.9 &\leq F_z [N] \leq 0.5, & -0.005 &\leq M_y [Nm] \leq 0.005. \end{aligned} \quad (10)$$



Şekil 1: Döner kanatlı İHA yönelim açısı ve açılmal hızı.



Şekil 2: Döner kanatlı İHA yörüngesi ve parkuru.



Şekil 3: Döner kanatlı İHA uygulanan kuvvet ve moment.

4.2. Sabit Kanatlı İnsansız Hava Aracı

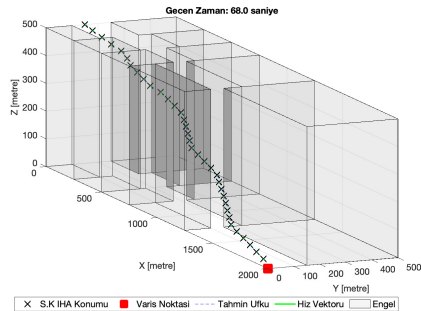
Sabit kanatlı bir İHA'nın hareketini nokta-parçacık (İng. *point-mass*) şeklinde 3 serbestlik derecesinde modellemek için kullanılan diferansiyel denklemler aşağıdaki hali almaktadır [22].

$$\begin{aligned} \dot{x} &= V \cos \gamma \cos \psi, & \dot{V} &= g(n_x - \sin \gamma), \\ \dot{y} &= V \cos \gamma \sin \psi, & \dot{\gamma} &= \frac{g}{V}(n_z \cos \mu - \cos \gamma), \\ \dot{z} &= V \sin \psi, & \dot{\psi} &= \frac{g}{V \cos \psi} n_z \sin \mu. \end{aligned} \quad (11)$$

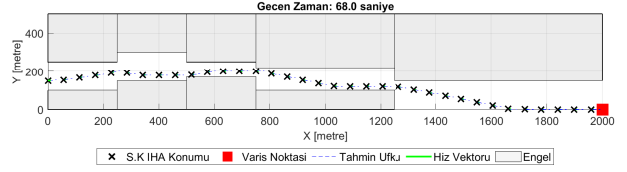
Burada yine $x, y, z \in \mathbb{R}$ ataletsel konumları ifade ederken, $V \in \mathbb{R}$ uçuş hızını, $\gamma, \psi \in \mathbb{R}$ ise uçuş yolu ve sapma açılarını belirtir. Girdi olarak $\mu \in \mathbb{R}$ yuvarlanma açısı komutu, $n_x, n_z \in \mathbb{R}$ ise ileri ve düşey ekseninde çekilen yük faktörleridir. Sabit kanatlı İHA simülasyonlarında $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ kullanılmakta ve $V_0 = 25 \text{ m/s}$ seçilmektedir.

MPC kurgusunda örnekleme zamanı $T_s = 0.1 \text{ s}$ ve $N = 10$ olarak seçilmiştir. MPC tasarımında kullanılan üst ve alt kısıt koşulları (12)'de verilmiştir. Engel koşulları alt kısıt olarak $x_{e,a}$ ve $z_{e,a}$ şeklinde ifade edilirken, $x_{u,a}$ ve $z_{u,a}$ engel koşulları üst kısıtını göstermektedir.

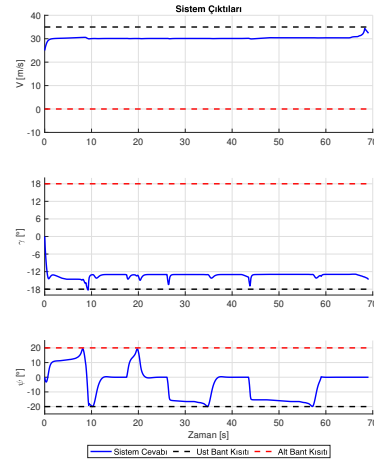
$$\begin{aligned} x_{e,a} \leq x [m] \leq x_{e,u}, & \quad 0 \leq V [m/s] \leq 35, & \quad -75 \leq \mu [^\circ] \leq 75 \\ y_{e,a} \leq y [m] \leq y_{e,u}, & \quad -18 \leq \gamma [^\circ] \leq 18, & \quad -0.5 \leq n_x [g] \leq 1 \\ z_{e,a} \leq z [m] \leq z_{e,u}, & \quad -20 \leq \psi [^\circ] \leq 20, & \quad -2 \leq n_z [g] \leq 2. \end{aligned} \quad (12)$$



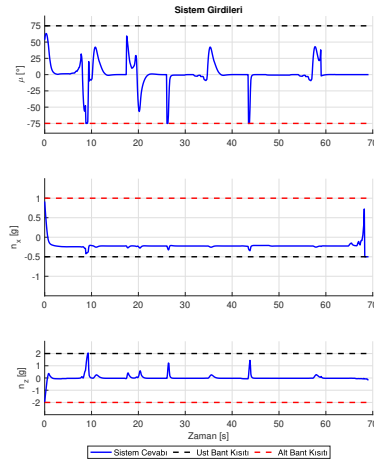
Şekil 4: Sabit Kanatlı İHA yörüngesi ve parkuru.



Şekil 5: Sabit kanatlı İHA yörüngesi ve parkuru (xy-düzlemi).



Şekil 6: Sabit kanatlı İHA uçuş hızı, uçuş yolu ve sapma açıları.



Şekil 7: Sabit Kanatlı İHA yuvarlanma açısı ve yük faktörü komutları.

5. Sonuçlar ve Tartışma

Çalışmadaki ilk senaryoda döner kanatlı bir İHA için (10)'da belirtilen konum, açı, ve hız kısıtlarının olduğu bir kargo taşıma görevinin icrası gösterilmektedir. Şekiller 1 ve 3 seçilen durum ve girdi kısıtlarına uyulduğunu göstermektedir. Bu senaryoda İHA, engelli parkurda duvarlara çarpmadan, sabit bir sürenin alt kısmına faydalı yükü minimum zamanda yerleştirecek planlamayı yapmıştır. Şekil 2'de gösterilen parkur için görev süresi 22 saniye olarak optimize edilmiştir.

İkinci senaryoda ise sabit kanatlı İHA, farklı tip binaların (veya yükseltelerin) olduğu dar bir alanda, bir koridor boyunca uçuş yaparak (12)'de belirtilen kısıtlara uyarak hedefe yönelmektedir. Şekiller 6 ve 7'de gösterildiği üzere İHA uçuş boyunca konum kısıtlarına uyarak çarpmadan ilerlediği gibi alçalma açısı ve yük faktörü gibi fiziksel etmenleri de gözetecek planlama yapmıştır. Şekiller 4 ve 5'te görülebileceği üzere İHA'nın engelli parkurda hedefe ulaşma süresi 68 saniye olarak optimize edilmiştir.

6. Teşekkür

Bu tür çalışmaları ve yayınları desteklediği için yazarlar Roketsan A.Ş. ve İleri Teknolojiler ve Sistemler Genel Müdür Yardımcılığı çalışanlarına teşekkür eder.

7. Kaynakça

- [1] L. Grüne, J. Pannek, L. Grüne, and J. Pannek, *Nonlinear model predictive control*. Springer, 2017.
- [2] B. Kouvaritakis and M. Cannon, "Model predictive control," *Switzerland: Springer International Publishing*, vol. 38, 2016.
- [3] D. Huo, L. Dai, R. Chai, R. Xue, and Y. Xia, "Collision-free model predictive trajectory tracking control for uavs in obstacle environment," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2022.
- [4] D. Silvestre and G. Ramos, "Model predictive control with collision avoidance for unknown environment," *IEEE Control Systems Letters*, 2023.
- [5] C. Zhao, D. Wang, J. Hu, and Q. Pan, "Nonlinear model predictive control-based guidance algorithm for quadrotor trajectory tracking with obstacle avoidance," *Journal of Systems Science and Complexity*, vol. 34, no. 4, pp. 1379–1400, 2021.
- [6] S. K. Cengiz and L. Uçun, "Optimal controller design for autonomous quadrotor landing on moving platform," *Simulation Modelling Practice and Theory*, vol. 119, p. 102565, 2022.
- [7] F. Dong, X. Li, K. You, and S. Song, "Deep neural network based model predictive control for standoff tracking by a quadrotor uav," in *2022 IEEE 61st Conference on Decision and Control (CDC)*, pp. 1810–1815, IEEE, 2022.
- [8] M. Ramezani, H. Habibi, J. L. Sanchez-Lopez, and H. Voos, "Uav path planning employing mpc-reinforcement learning method considering collision avoidance," in *2023 International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS)*, pp. 507–514, IEEE, 2023.
- [9] Z. Xie, J. Pu, C. Wei, and Y. Guan, "Cubature kalman filters model predictive static programming guidance method with impact time and angle constraints considering modeling errors," *Mathematics*, vol. 11, no. 13, p. 2990, 2023.
- [10] D. Wang, S. Miao, and Q. Xin, "Receding horizon optimization-based integrated path planning and tracking control of evtol uav," in *2022 China Automation Congress (CAC)*, pp. 5610–5615, IEEE, 2022.
- [11] C. A. McKenna and A. Gorodetsky, "Online parameter estimation within trajectory optimization for dynamic soaring," in *AIAA SCITECH 2023 Forum*, p. 1482, 2023.
- [12] T. Wakabayashi, Y. Suzuki, and S. Suzuki, "Dynamic obstacle avoidance for multi-rotor uav using chance-constraints based on obstacle velocity," *Robotics and Autonomous Systems*, vol. 160, p. 104320, 2023.
- [13] L. Bako, D. Chen, and S. Lecoche, "A numerical solution to the minimum-time control problem for linear discrete-time systems," *CoRR*, vol. abs/1109.3772, 2011.
- [14] Y.-C. Chang and T.-C. Tsao, "Minimum-time contour tracking with model predictive control approach," in *2014 American Control Conference*, pp. 1821–1826, IEEE, 2014.
- [15] A. Romero, S. Sun, P. Foehn, and D. Scaramuzza, "Model predictive contouring control for time-optimal quadrotor flight," *IEEE Transactions on Robotics*, vol. 38, no. 6, pp. 3340–3356, 2022.
- [16] G. Zhang, Y. Zheng, Y. He, L. Yang, H. Nie, C. Huang, and Y. Zhao, "Guided time-optimal model predictive control of a multi-rotor," *IEEE Control Systems Letters*, 2023.
- [17] J. Nocedal and S. J. Wright, *Numerical optimization*. Springer, 1999.
- [18] O. H. Altıntaş, "Adaptive lyapunov redesign of model predictive powered descent guidance," Master's thesis, Middle East Technical University, 2020.
- [19] A. Bemporad, L. Chisci, and E. Mosca, "On the stabilizing property of siorhc," *Automatica*, vol. 30, no. 12, pp. 2013–2015, 1994.
- [20] A. G. Pandala, Y. Ding, and H.-W. Park, "qpswift: A real-time sparse quadratic program solver for robotic applications," *IEEE Robotics and Automation Letters*, vol. 4, no. 4, pp. 3355–3362, 2019.
- [21] O. H. Altıntaş and A. E. Turgut, "Constrained discrete-time optimal control of uncertain systems with adaptive lyapunov redesign," *Turkish Journal of Electrical Engineering and Computer Sciences*, vol. 29, no. 3, pp. 1836–1851, 2021.
- [22] Y. Zhang, J. Chen, and L. Shen, "Real-time trajectory planning for ucav air-to-surface attack using inverse dynamics optimization method and receding horizon control," *Chinese Journal of Aeronautics*, vol. 26, no. 4, pp. 1038–1056, 2013.