

TTKF: Sistem Modelinin Zaman İçinde Değiştiği Durumlarda Uygulanabilir Yeni Bir Adaptif Kalman Filtresi Yöntemi

TTKF: A New Method of Adaptive Kalman Filter Applicable When the System Model Changes Over Time

Sertaç İkizoğlu¹, Leyla Gören-Sümer²

¹Kontrol ve Otomasyon Mühendisliği Bölümü
İstanbul Teknik Üniversitesi, İstanbul
ikizoglus15@itu.edu.tr

² Kontrol ve Otomasyon Mühendisliği Bölümü
İstanbul Teknik Üniversitesi, İstanbul
gorenl@itu.edu.tr

Özetçe

Bu çalışmada, sistem modelinin zaman içerisinde değiştiği durumda kullanılmak üzere adaptif bir Kalman Filtresi yöntemi geliştirilmesi amaçlanmıştır. Bu amaçla, klasik Kalman Filtresi ve Kalman Düzleştiricisi yöntemlerinden olan Rauch-Tung-Striebel (RTS)'in bir arada kullanıldığı yeni bir yöntem tanıtılmaktadır. Yöntem çalışma prensibiyle ilişkili olacak şekilde Time-Travel Kalman Filter (TTKF) olarak isimlendirilmiştir. Literatürdeki adaptif Kalman Filtresi yöntemlerinden farklı olarak Q ve R Kalman parametrelerinin güncellenmesine gerek kalmayacak şekilde tek bir değişken parametreye sahip yeni bir yöntem sunulmuştur. Sunulan yeni yöntemin performansını incelemek amacıyla modelin zamanla değiştiği bir senaryo tanımlanarak klasik Kalman Filtresi ile durum kestirim performansları karşılaştırılmış ve görselleştirilmiştir. Son olarak yöntemin artıları ve geliştirilebilir yönleri sunularak gelecek çalışmalar için önerilerde bulunulmuştur.

Abstract

In this study, the aim is to develop an adaptive Kalman Filter method to be used when the system model changes over time. For this purpose, a new method is introduced, which combines the classical Kalman Filter and one of the Kalman Smoother methods, known as Rauch-Tung-Striebel (RTS). The method is named Time-Travel Kalman Filter (TTKF) to reflect its working principle. Unlike other adaptive Kalman Filter methods in the literature, a new method with a single variable parameter is proposed, eliminating the need for updating the Q and R Kalman parameters. To examine the performance of the proposed method, a scenario where the model changes over time is defined and the estimation performance of the classical Kalman Filter is compared and visualized. Finally, the advantages and possible improvement points of the method are presented, along with suggestions for future studies.

1. Giriş

Kalman Filtresi, modeli bilinen bir sistemin durumlarını kestirmek üzere kullanılan gerçek zamanlı bir durum kestiricisidir [1,2,4]. Kalman Filtresi sistem modelinin bilinmesi ve durumlar ile ölçülen sistem çıkışına etki eden gürültünün normal dağılıma sahip olduğu koşulda en iyi durum kestirimini matematiksel olarak garanti eder. Pratikte karşılaşılan gürültülerin sıklıkla normal dağılım göstermesinden dolayı Kalman Filtresi durum kestirimi için pratikte yaygın olarak kullanılan bir yöntemdir. Her ne kadar karşılaşılan işlem ve ölçme gürültüleri normal dağılıma sahip olsa da modellenen her sistemde ihmal edilebilir ya da çeşitli durumlarda ihmal edilemez modelleme hataları olacağından Kalman Filtresi'nin modelin bilinme ön koşulu tam anlamıyla karşılanamayacaktır. Bu koşulun sağlanmadığı durumda, kestirimin yakınsaklığının da garanti edilemeyeceğini belirtmek gereklidir. Bu durum, Kalman Filtresi kullanımında filtre parametreleri olan Q ve R matrislerinin kalibre edilme gerekliliğini doğurur. Her ne kadar Q ve R parametrelerinin seçimi ile ilgili önerilen teorik yöntemler olsa da [3] kabul gören tek bir yöntemden söz etmek mümkün değildir. Dolayısıyla pratikte parametreler bir kalibrasyon sürecinden geçmektedir.

Her ne kadar filtre parametreleri kalibre edilse de sistem modelinin zamanla değişmesi durumunda ilk başta elde edilen kalibrasyon seti artık geçerli olmayacaktır. Bunun nedeni her bir sistem için optimal durum kestirim sonucunu veren ayrı bir filtre parametre setinin olmasıdır. Bu durumda zamanla değişen sistem modeli ile, zamanla değişen Kalman Filtresi değerlerinin gerekliliği ortaya çıkmaktadır. Filtre parametrelerinin kalibre edilen sisteme göre sabit kalması, modelin zaman içinde değişmesi durumunda durum kestirimlerinin yanlış sonuçlar vermesine neden olacaktır. Literatürde bu amaçla geliştirilmiş adaptif Kalman Filtresi yöntemleri bulunmaktadır. Bu yöntemlerin temel prensibi, kestirim ve ölçüm arasındaki hata değerini azaltacak şekilde Q ve R matrislerinin güncellenmesidir [5-8]. Böylece zamanla değişen sistem modeli için çevrimiçi şekilde güncellenen Q ve R matrisleri elde edilmektedir. Önerilen yöntemlerde Kalman

Filtresi'nin parametrelerinin yanında, parametre güncellemesi esnasında kullanılacak yeni parametrelerin de kalibrasyon ihtiyacı ortaya çıkmıştır. Bu çalışmada önerilen yöntemin avantajlarından biri de yalnızca tek bir kalibrasyon parametresine ihtiyaç duyulmasıdır.

Bu bilgilere ilave olarak Kalman Düzleştirici, Kalman Filtresi ile gerçek zamanlı yapılan durum kestirimlerini çevrimdışı olarak iyileştirmeye yarayan bir yöntem olarak kullanılmaktadır [11,12]. Çeşitleri bulunmasıyla birlikte, işlem yükü olarak düşük olmasının avantajıyla RTS Kalman Düzleştirici pratikte tercih edilen bir yöntemdir [9,10] ve bu çalışmada da önerilen yöntemin bir parçası olarak kullanılacaktır. Matematiksel olarak, Kalman Filtresi'nin geri yönde çalıştırılması şeklinde tarif edilebilir. İleri yönde kullanılan Kalman Filtresi kestirimleri ve kovaryans matrisleri saklanarak geri yönde iteratif bir şekilde yapılan kestirimler düzeltilir. Literatür araştırması sürecinde fark edilmiştir ki genel yaklaşım olarak Kalman Düzleştirici çevrimdışı olarak kullanılan bir yöntemdir [13-16]. Yöntemin geriye dönük durum kestirimlerini düzeltmesi bunun ana sebebidir.

Bu bilgiler ışığında, bu çalışmada sistem modelinin zamanla değişmesi durumunda, kestirim performansını arttırmak için, Kalman Filtresi ve RTS Kalman Düzleştirici yöntemleri, filtre parametrelerinin güncellemesine gerek kalmayacak şekilde birlikte kullanılan bir yöntem önerilmiştir.

Not edilmelidir ki, çalışma boyunca bütün denklemler ayrı zamana ifade edilecektir. Ayrıca gerçekleştirilecek tüm simülasyonlar da sabit 10ms örnekleme zamanı ile ayrı zamanlı olarak koşulacaktır. Çalışmanın ilerleyen bölümlerinde sürekli zaman ile ifade edilen transfer fonksiyonları sistem dinamikleri arasındaki farkın daha iyi idrak edilebilmesi amacıyla sürekli zamanda ifade edilmiştir. Simülasyonlar esnasında sistemler ayrıklaştırılmaktadır. Bir diğer önemli not ise, çalışma boyunca sunulan sistem çıkışlarına ilişkin tüm grafiklerde x-ekseninin birimi saniye olmak üzere zaman, y-ekseni ise birimsiz şekilde genlik olarak ifade edilmiştir.

2. Kalman Filtresi

Kalman Filtresi, uygulamada yaygın olarak kullanılan bir durum kestiricisidir. Kalman Filtresi, modeli bilinen ve (1), (2)'deki şekilde ifade edilen bir sisteme uygulanan kontrol işaretini, bir önceki örnekleme zamanında yapılan durum kestirim değerlerini ve o anki örnekleme zamanında ölçülen sistem çıkışı bilgilerini kullanarak o anki örnekleme zamanı için durum kestirimlerinde bulunur [1,2]. Bu kestirim sürecinde sistemin çıkışına etkiyen ölçme gürültüsü (v_k) ve durumlar üzerine etkiyen işlem gürültüsünün (w_k) normal dağılıma sahip olduğu kabul edilir [3]. Çıkış üzerine etkiyen ölçme gürültüsünün uygulamadaki karşılığı çevre etkenlerden (sıcaklık, rüzgâr, vb.) de etkilenen ölçme cihazı olarak belirtilebilir. Durumlar üzerine etkiyen işlem gürültüsünün kaynağı ise modelleme hataları ve kontrol işareti üzerine etkiyen gürültülerdir.

Kalman Filtresi'nin yaptığı kabul ve önkoşullarından bir diğeri ise sistem modelinin biliniyor olmasıdır. Bu koşullar sağlandığında Kalman Filtresi matematiksel olarak en iyi durum kestiriminin yapılacağını garanti eder.

$$x_k = A_k x_{k-1} + B_k u_k + w_k \quad (1)$$

$$y_k = H_k x_k + v_k \quad (2)$$

$$mean(w_k) = mean(v_k) = 0 \quad (3)$$

Kalman Filtresi matematiksel olarak iki aşamadan oluşur. Bunlardan ilki tahmin, ikincisi ise düzeltme aşamalarıdır. İlk aşama olan tahmin bölümünde, bir önceki örnekleme zamanında yapılan durum ve kovaryans kestirimlerinden yararlanılır ve o anki örnekleme zamanında elde edilecek durum ve kovaryans matrisi için bir tahmin yapılır (4), (5).

$$\hat{x}_{k|k-1} = A_k \hat{x}_{k-1|k-1} + B_k u_k \quad (4)$$

$$\hat{P}_{k|k-1} = A_k \hat{P}_{k-1|k-1} A_k^T + Q_k \quad (5)$$

İkinci bölüm olan düzeltme aşamasında ise sistem çıkışından yapılan ölçüm ile durum tahminlerinden hesaplanan sistem çıkışı arasındaki fark hesaplanır. Aradaki hataya bağlı olarak optimal Kalman kazanç matrisi K_k (6)'daki şekilde düzeltilir. Bu değere bağlı, o anki örnekleme zamanı için sistem durum ve kovaryans matris kestirimleri de (7) ve (8)'deki şekilde yapılır.

$$K_k = \hat{P}_{k|k-1} H_k^T (H_k \hat{P}_{k|k-1} H_k^T + R_k)^{-1} \quad (6)$$

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + K_k (z_k - H_k \hat{x}_{k|k-1}) \quad (7)$$

$$\hat{P}_{k|k} = (I - K_k H_k) \hat{P}_{k|k-1} \quad (8)$$

2.1. Modelin Bilindiği Durumda Kalman Filtresi Performansı

İdeal senaryoda, sistem modeli, ölçüm ve işlem gürültülerinin standart sapmalarının bilindiği durumda Kalman Filtresi matematiksel olarak en iyi sonucu vereceğini garanti eder. (5) ve (6)'da belirtilen Kalman parametreleri R_k ve Q_k sırasıyla ölçme ve işlem gürültülerine ait kovaryans matrisleri olmak üzere, bu matrislerin (9)'daki şekilde seçildiği ve sistem modelinin hatasız olarak bilindiği durumda en iyi durum kestirim performansı sağlanacaktır.

$$R_k = var(v_k) \quad (9)$$

$$Q_k = var(w_k)$$

Ne var ki, giriş bölümünde de belirtildiği üzere uygulamada, modellenen her sistemde model belirsizlikleri mevcuttur. Dolayısıyla, bu bölümde bahsedilen ideal koşullar (modelleme hatasının olmaması ve işlem gürültüsünün bulunmaması) pratikte sağlanamayacaktır. Bir sonraki bölümde, modelleme hatasının Kalman Filtresi'nin kestirim performansını nasıl etkilediği incelenecektir.

2.2. Model Belirsizliği Olduğu Durumda Kalman Filtresi Performansı

Bölüm 1 ve Bölüm 2.1'de bahsedildiği üzere uygulamada, bir sistemi hatasız bir şekilde modellemek mümkün değildir. Dolayısıyla, Bölüm 2.1'deki ideal durumdan söz etmek ve Kalman parametrelerinin bahsedildiği şekilde seçilmesi de mümkün olmayacaktır. Bununla birlikte, her ne kadar 'işlem gürültüsünün ölçülmesi' gibi bir kavramdan söz edilemese de ölçme gürültüsü ölçülebilir ve hesaplanabilir bir büyüklüktür.

'Ölçme gürültüsü' kavramı, sistem çıkışının bir sensör yardımıyla algılanması esnasında meydana gelen gürültü şeklinde tanımlanabilir. Dolayısıyla, bu gürültünün beyaz gürültü karakteristiğinde olduğu varsayımı altında, ölçme gürültüsüne ait karakteristik bilgilere çeşitli yöntemlerle ulaşılabilir ve buradan hareketle R_k parametresinin seçimi (9)'a göre gerçekleştirilebilir. Ne var ki, işlem gürültüsüne ait kovaryans matrisini elde etmek için uygulamada çeşitli

önermeler olsa da kabul görmüş tek bir yöntemden söz etmek mümkün değildir. Bu nedenle, yaygın olarak Q_k parametresinin seçiminde bir kalibrasyon sürecinden bahsedilebilir.

Bahsedilen Kalman parametre seçimi bir simülasyon üzerinden gösterilebilir. Bu amaçla ‘gerçek sistem’ olarak (10)’daki sürekli transfer fonksiyonunun 10ms ile örneklenmiş (11)’deki ayrık transfer fonksiyonu, modellenen sistem olarak ise (12)’deki sürekli transfer fonksiyonunun 10ms ile örneklenmiş (13)’deki ayrık transfer fonksiyonu kullanılacaktır.

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1} \quad (10)$$

$$G(z) = \frac{4.983 \cdot 10^{-5}z + 4.967 \cdot 10^{-5}}{z^2 - 1.99z + 0.99} \quad (11)$$

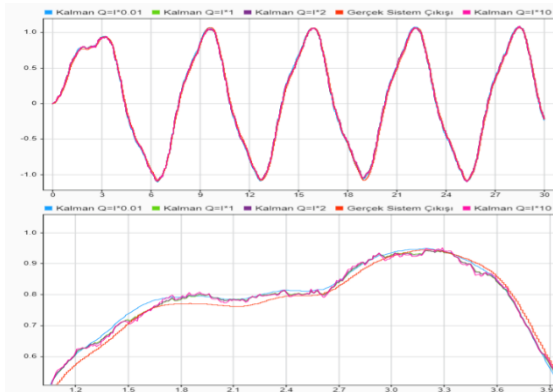
$$G_m(s) = \frac{1}{s^2 + 0.9s + 1} \quad (12)$$

$$G_m(z) = \frac{4.985 \cdot 10^{-5}z + 4.97 \cdot 10^{-5}}{z^2 - 1.991z + 0.991} \quad (13)$$

(10) ve (12)’den de fark edilebileceği üzere modellenen ve gerçek sistem arasında bir miktar hata bulunmaktadır. Bölüm 2.1 göz önüne alındığında, ölçme gürültüsüne ait karakteristiğinin bilindiği ve beyaz gürültü karakteristiği gösterdiği varsayımında bulunulacaktır. Bu simülasyonda sistem çıkışına (2)’deki v_k ’ya karşılık düşecek şekilde, standart sapması 0.0312 olan bir ölçme gürültüsü uygulanmıştır. Dolayısıyla, R_k değeri (9)’a uygun olarak (14)’teki şekilde seçilebilir.

$$R_k = 9.7398 \cdot 10^{-4} \quad (14)$$

Devamında, Q_k ’nın diyagonal matris olduğu ve diyagonaldeki değerlerin aynı olduğu varsayımıyla farklı kovaryans değerleri için minimum ISE (karesel hata integrali, İngilizce Integral Square Error) değerini verecek Q_k matrisini bulmak üzere 4 farklı simülasyon koşulluştır. Bunlar, Q_k matrisinin diyagonalindeki değerler sırasıyla 0.01, 1, 2 ve 10 olacak şekilde gerçekleştirilen simülasyonlardır ve Şekil 1’de Kalman Filtresi ile kestirilen sistem çıkışları ve gerçek sistem çıkışı arasındaki fark sunulmuştur. Gerçek sistem çıkışı ve Kalman kestirimleri arasındaki ISE değerleri ise Tablo 1’de verilmiştir.



Şekil 1: Gerçek sistem çıkışı ve Kalman Filtresi ile kestirilen sistem çıkışları.

Tablo 1: Kalman parametresi ve ISE metriği ilişkisi

Q_k Diyagonal Değerleri	ISE
0.01	0.01891
1	0.0115
2	0.01168
10	0.0125

Tablo 1’deki değerler göz önüne alındığında, minimum ISE’yi verecek şekilde Q_k ’nın (15)’teki şekilde seçilmesi mantıklıdır.

$$Q_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (15)$$

İncelenen simülasyon göz önüne alındığında, Kalman Filtresi’nin optimal durum kestirimini vermesi için gerekli olan ön koşullarından olan ‘sistem modelinin bilinmesi’ durumu sağlanmadığında filtre performansı kalibrasyon parametrelerinin (Q_k ve R_k) seçiminden direkt olarak etkilendiği sonucuna varılabilir. Dolayısıyla, model bilinmezliğinin olduğu durumda ya da modelin zamanla değişmesinden kaynaklanan model bilinmezlikleri durumunda Kalman Filtresi’nin performansını farklı yöntemlerle arttırmak mümkün olacaktır.

Literatürde, bu gibi durumlarda Kalman parametrelerinin kestirim hatasını minimize edecek şekilde güncellendiği yöntemler tercih edilmektedir [5-8]. Bu çalışmanın merkezinde bulunan ve 4. bölümde detaylı şekilde tanıtılacak olan yöntem (TTKF) hem Kalman parametrelerinin sabit olduğu hem de değişken olduğu durumlarda kullanılabilir.

3. Kalman Düzleştirici

Kalman Düzleştiricisi, Kalman Filtresi ile gerçek zamanlı yapılan durum kestirimlerini çevrimdışı olarak iyileştirmeye yarayan bir yöntem olarak kullanılmaktadır. Temel prensip olarak, ileri yönde Kalman Filtresi ile hesaplanan durum kestirimleri ve Kalman parametreleri hafızada tutulur ve geri yönde bu değerler kullanılarak yapılan durum kestirimleri iyileştirilir. Geri yönde iteratif bir şekilde yapılan hesaplamalar ve ileri yöndeki Kalman parametrelerinin hafızada tutulmasındandır ki işlem yükü ve bellek ihtiyacı yüksek olan bir yöntemdir. Bu nedenle uygulamada çevrimdışı filtreleme yöntemi olarak tercih edilmektedir.

Uygulamada yaygın olarak kullanılan RTS [9,10] ve Değiştirilmiş Bryson-Frazier [11] düzleştiricilerinden düşük işlem yükü sebebiyle RTS algoritması bu çalışma kapsamında kullanılacaktır. Bu bölümde RTS’in denklemleri, parametreleri ve önceki bölümlerde tanıtılan sistem üzerinde performansının etkisi incelenecektir. Uygulamada yaygın olarak çevrimdışı filtreleme yöntemi olarak kullanılıyor olsa da çevrimiçi filtre olarak da kullanılabilir olduğuna değinilecektir ve simülasyonlarla desteklenecektir.

3.1. Rauch-Tung-Striebel (RTS) Düzleştirici

RTS düzleştirici iki yönlü olarak çalışan etkili bir filtreleme yöntemidir. İleri yönde klasik Kalman Filtresi olarak çalıştırılmaktadır. Devamında, Kalman Filtresi’nin her

adımında hesaplanan durum kestirimleri ($\hat{x}_{k|k}, \hat{x}_{k|k-1}$) ve kovaryans matrisleri ($P_{k|k-1}, P_{k|k}$) hafızada tutulur ve son adımdan başa doğru iteratif bir şekilde bu değerler kullanılarak yapılan durum kestirimleri güncellenir. Geçmişteki durum kestirimlerinin güncellenmesindedir ki RTS yaygın olarak çevrimdışı filtreleme yöntemi olarak tercih edilmektedir.

$\hat{x}_{k|k}$ ve $\hat{x}_{k|k-1}$ sırasıyla (4) ve (7)'deki şekilde apriori ve aposteriori Kalman durum kestirimleri olmak üzere, düzleştirilmiş durum kestirimi ve kovaryans matrisi (16) ve (17)'deki şekilde hesaplanmaktadır [9].

$$\hat{x}_{k|n} = \hat{x}_{k|k} + C_k(\hat{x}_{k+1|n} - \hat{x}_{k+1|k}) \quad (16)$$

$$P_{k|n} = P_{k|k} + C_k(P_{k+1|n} - P_{k+1|k})C_k^T \quad (17)$$

$$C_k = P_{k|k} A_{k+1}^T P_{k+1|k}^{-1} \quad (18)$$

Düzleştiricinin ilk adımı Kalman Filtresi'nin son adımı olacak şekilde denklemler başlatılmakta ve geri yönde iteratif şekilde hesaplamalar yapılmaktadır. $\hat{x}_{k+1|n}$, geri yöndeki ilk adımda bulunmayacağı için geri yönde $\hat{x}_{k|k}$ ile başlatılabilir.

3.1.1. RTS performansı – periyodik olarak uygulandığı durum

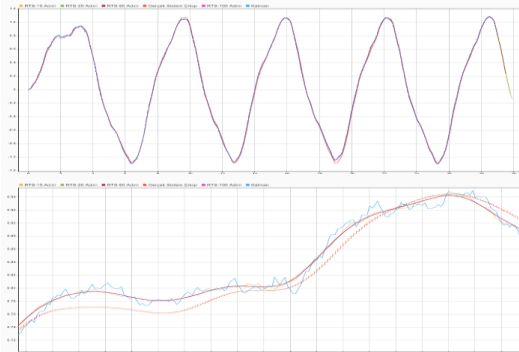
Bölüm 3.1'de anlatıldığı üzere, RTS geri yönde iteratif olarak çalışan bir kestirim yöntemidir. Uygulamada yaygın olarak çevrimdışı filtreleme yöntemi olarak tercih edilmektedir [13-16]. Bu nedendir ki en iyi kestirim performansını elde edebilmek için tüm verinin kullanıldığı durumlar ağırlıktadır. Ne var ki, RTS'i belli periyotlarla çalıştırmak da mümkündür. Bu durumda beklenen, tüm verinin kullanıldığı durumdan daha az olsa da yine de kestirim performansında iyileşme olmasıdır.

Bu durumu gösterebilmek adına Bölüm 2.2'dekine benzer şekilde gerçek sistemin (10)'da sunulan sürekli transfer fonksiyonuna sahip olduğu durumda, sistemin (12)'deki şekilde modellendiği durum ele alınacaktır. Q_k - R_k parametre seti (19)'daki şekilde seçilecektir. Bu senaryoda RTS yine çevrimdışı olarak uygulanacaktır, ancak 10, 20, 50 ve 100 adımlık periyotlarla gerçekleştirilecektir.

$$R_k = 9.7398 \cdot 10^{-4} \quad (19)$$

$$Q_k = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$$

Daha açıklayıcı olması adına, adım sayısı n olacak şekilde, $(n+1)$ 'inci örneklemeden başlayarak her örneklemede n iterasyon boyunca RTS uygulanacaktır. Dolayısıyla her k örnekleme zamanında $(k-n)$ 'deki durum kestirimi güncellenmiş olacaktır. Bu bilgiler ışığında gerçekleştirilen simülasyon sonuçları Şekil 2 ve Tablo 2'de sunulmuştur.



Şekil 2: Kalman Filtresi ve RTS ile elde edilen sistem çıkışı kestirimleri (periyodik olarak uygulandığı durum).

Tablo 2: RTS adım sayıları ve ISE metriği ilişkisi

RTS Adım Sayısı	ISE
10	0.009921
20	0.009691
50	0.009685
100	0.009678

Şekil 2 ve Tablo 2 değerlendirildiğinde RTS'in 10, 20, 50 ve 100 adımlık periyotlarla uygulandığı durumların her birinde kestirim performansı yalnızca Kalman Filtresi'nin kullanıldığı durumdan daha iyi sonuç vermektedir (bkz. Tablo 1). Burada önemli olan nokta, ISE metriğindeki değişimin adım sayısı ile olan ilişkisidir. Tablo 2 incelendiğinde görülecektir ki adım sayısı arttıkça kestirim performansı da iyileşmektedir.

Elbette ki bütün verinin kullanıldığı durumda kestirim performansı diğer seçeneklere göre daha yüksek olacaktır ancak RTS'in belli bir periyotla çalıştırılması hem kestirim performansında belli bir iyileşme sağlayacak hem de çevrimiçi bir filtreleme yöntemi olarak kullanılabilir bir zemin hazırlayacaktır. Bir sonraki bölümde bu çalışmanın merkezinde bulunan çevrimiçi kestirim yöntemi tanıtılırken periyodik olarak çalıştırılan RTS'den yararlanılacaktır.

4. TTKF

Bu bölümde sistem modelinin zaman içerisinde değişmesi durumlarında kullanılabilir olmak üzere yeni bir adaptif Kalman Filtresi yöntemi tanıtılacaktır. Bu amaçla önceki bölümlerde tanıtılan klasik Kalman Filtresi ve RTS Kalman Düzleştirici'den yararlanılacak, iki yöntemin bir kombinasyonu olacak şekilde yeni yöntem şekillendirilecektir. Sırasıyla, TTKF'nin denklemleri ve ana prensibi tanıtılacak, sistem modelinin zamanla değiştiği durum için kestirim performansı ve klasik Kalman Filtresi ile karşılaştırılması yapılacaktır.

4.1. Çalışma Prensibi ve Denklemler

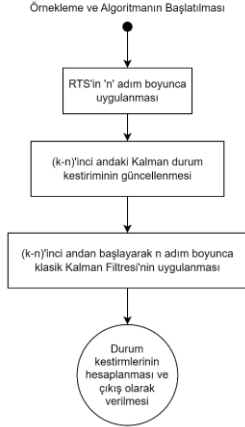
Bölüm 1'de yöntemin çalışma prensibine dair verilen açıklamaların önemli noktalarını bir kez daha belirtmek gereklidir. Böylece Kalman Filtresi'ni RTS ile birleştirmenin ardındaki fikir daha net olarak anlaşılacaktır.

Öncelikle Bölüm 2 ve alt bölümlerinde de anlatıldığı üzere Kalman Filtresi, optimal durum kestirimi için talep ettiği önkoşullardan biri olan 'sistem modelinin bilinmesi' durumunun sağlanmadığı koşulda en iyi sonucu vermemektedir. Uygulamada bir sistemin modeli her koşulda bir miktar hata içermektedir. Bu hata ihmal edilebilir limitlerde olabileceği gibi durum kestirimini ciddi derecede etkileyecek sınırların dışında da olabilir, ancak her halükârda belli bir model hatası kaçınılmazdır. Dolayısıyla Kalman Filtresi'nin kestirim performansını iyileştirmek mümkün hale gelmektedir.

Bununla beraber, Bölüm 3 ve alt bölümlerinde de anlatıldığı üzere pratikte yaygın bir uygulama olarak RTS'in bütün veri üzerinde uygulanmasına gerek yoktur. RTS belli periyotlarla uygulandığı durumda da Kalman Filtresi ile sağlanan durum kestirimlerini ISE metriği kapsamında

iyileştirmektedir. Dolayısıyla, RTS'in çevrimdışı bir filtreleme yöntemi olarak kullanılma gereği yoktur ve bu çalışmada belli periyotlar ile çalıştırılarak önerilecek yeni çevrimiçi filtreleme yönteminin bir parçası haline gelebilir. Bunlara ilave olarak, çalışmanın en önemli noktalarından bir diğeri de Kalman Filtresi'nin durum kestirimlerinin birbirlerini doğrudan etkiliyor olmasıdır. Her örnekleme zamanında yapılan durum kestirimi bir önceki örnekleme zamanında yapılan durum kestirimine bağlıdır (bkz. (4) ve (7)). Bu durumda, geçmişte yapılan bir durum kestiriminin güncellenmesi o anda yapılacak olan durum kestirimini etkileyecektir.

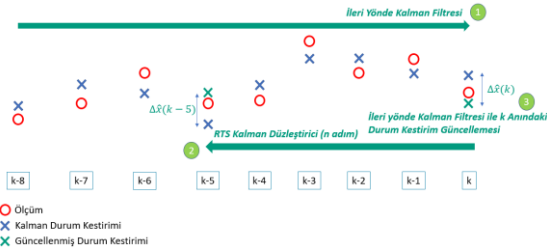
Yukarıda listelenen durumların hepsi göz önüne alındığında önerilen yöntemin akışı Şekil 3'teki şekilde ifade edilmektedir.



Şekil 3: TTKF Çalışma Döngüsü.

Şekil 3'te verilen akışta bahsedilen Kalman Filtresi ve RTS denklemleri Bölüm 2 ve Bölüm 3.1'de sunulmuştur. Dolayısıyla Şekil 3'te verilen akışa göre sırasıyla (16)-(18) ve (4)-(8) denklemleri algoritmada kullanılmaktadır.

Daha iyi anlaşılması adına, TTKF'nin geribeslemeli bir kestirim döngüsü elde etmeyi amaçladığı söylenebilir. Örnek oluşturması amacıyla 5 adımlık bir TTKF döngüsü Şekil 4'te görselleştirilmiştir.



Şekil 4: TTKF Basitleştirilmiş Algoritma Döngüsü.

4.2. Kestirim Performansı

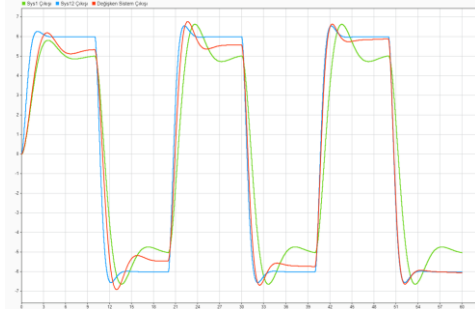
Bu bölümde TTKF'nin durum kestirim performansı incelenecek ve klasik Kalman Filtresi ile performans karşılaştırması yapılacaktır. Bu amaçla ikinci derece bir sistemin her 3 parametresinin (ζ , ω_n ve K) de zamanla değiştiği bir durum incelenecektir. İkinci derece sürekli zamanlı bir sistem transfer fonksiyonu (20)'deki şekilde ifade edilebilir.

$$G(s) = \frac{K \cdot \omega_n^2}{s^2 + 2 \cdot \zeta \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^2} \quad (20)$$

Bu amaçla, gerçek sistem ilk anda (10)'daki transfer fonksiyonuna ait şekilde davranacak ve simülasyon zamanı ilerledikçe ζ , ω_n ve K değerleri doğrusal şekilde arttırılacaktır. Öyle ki, simülasyon sonunda oluşacak sistem sürekli transfer fonksiyonu (21)'deki şekilde olacaktır.

$$G(s) = \frac{4.8}{s^2 + 2.8s + 4} \quad (21)$$

Bu durum Şekil 5'te ölçme gürültüsü olmayacak şekilde görselleştirilmiştir.



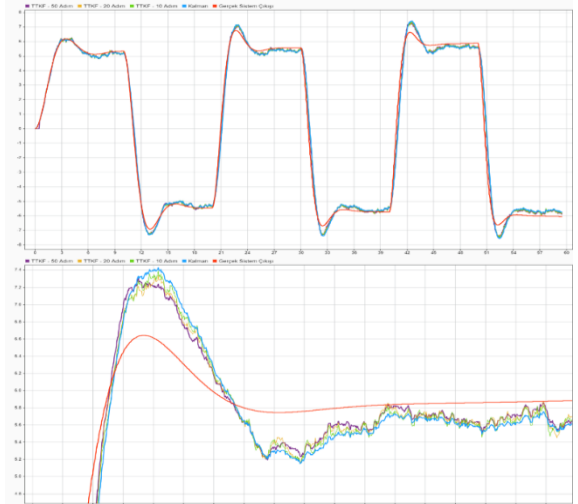
Şekil 5: Modelin zamanla değiştiği durumda sistem çıkışı (ölçme gürültüsü olmadığı durum).

Bu davranışa ölçme gürültüsü eklendiğinde elde edilen sistem çıkışı Şekil 6'da sunulmuştur.



Şekil 6: Modelin zamanla değiştiği durumda sistem çıkışı (ölçme gürültüsü olduğu durum).

Bu durumda klasik Kalman Filtresi ile elde edilen sistem çıkışının kestirimi ve TTKF'nin 10, 20 ve 50 adımlık periyotları ile elde edilen sistem çıkışı kestirimleri Şekil 7'de sunulmuştur.



Şekil 7: Kalman Filtresi ve TTKF ile elde edilen sistem çıkışı kestirimleri.

Kalman Filtresi ve TTKF'nin 10, 20 ve 50 adımlık periyotları ile elde edilen sistem çıkışı kestirimleri ve gerçek sistem çıkışı arasındaki ISE değerleri Tablo 3'te sunulmuştur.

Tablo 3: Kestirim yöntemi ve ISE metriği ilişkisi

Yöntem	ISE
Kalman Filtresi	13.83
TTKF - 10 Adım	11.15
TTKF - 20 Adım	9.733
TTKF - 50 Adım	9.02

4. Sonuç ve Öneriler

Bölüm 4'te bu çalışmanın merkezinde bulunan TTKF yöntemi tanıtılmış, sistem modelinin zamanla değiştiği durum için durum kestirim performansı incelenmiş ve klasik Kalman Filtresi ile performans karşılaştırılması yapılmıştır. Şekil 7 ve Tablo 3 göz önüne alındığında, önerilen yöntemin klasik Kalman Filtresi performansını sistem modelinin zamanla değiştiği durumlarda ciddi derecede iyileştirdiği gözlemlenmektedir.

Önerilen yöntemin avantajlarından bir diğeri ise uygulamada kullanılan ve Bölüm 2.2'nin sonunda da bahsedilen adaptif Kalman Filtresi yöntemleri ile kullanılabilir olmasıdır. Bu yöntemler temel prensip olarak R_k ve Q_k matrislerinin güncellenmesine dayalıdır. TTKF her örnekleme anında durum kestirimi için kullanılan parametreleri hafızada tutarak geri yönde kullandığı için Kalman parametrelerinin güncellenmesi TTKF'nin kullanımına engel bir durum oluşturmamaktadır. Dolayısıyla hem ilgili yöntemler hem de TTKF aynı anda kullanılarak kestirim performansı daha da iyileştirilebilir.

TTKF'nin belirtilen avantajlarının yanında yüksek işlem yükü gerektirmesi yöntemin eksilerinden sayılabilir. Yöntemin performansı seçilen adım sayısı ile doğrudan ilişkilidir. Dolayısıyla kestirim performansını arttırmak için işlem yükünün de artması gerekecektir.

Sonraki çalışmalara temel oluşturması açısından, bu çalışmada tanıtılan TTKF yönteminin yalnızca modelin zamanla değiştiği durumda değil ölçme gürültüsünün zamanla değiştiği durumda da kullanılabilir olduğunu belirtmek gereklidir. Temel prensip olarak ilk anda yapılan Kalman Filtresi kalibrasyonunun zaman içinde geçerliliğini yitirdiği herhangi bir durum için kullanılabilir bir yöntem olduğunun altı çizilmelidir. Ayrıca, bu çalışmadaki simülasyonların ikinci derece bir sistem üzerinden gerçekleştirildiğini, ancak yöntemin yüksek mertebeden sistemlerde de geçerli olacağını belirtmek gereklidir.

Kaynakça

[1] Kalman, R. E. (1960). "On the general theory of control systems," in Proc. First Internat. Congress Automat. Contr., pp. 481–491, Moscow.

[2] Kalman, R. E. (1960). "A new approach to linear filtering and prediction problems," Trans. ASME Series D, J. Basics Eng., vol. 82, no. 1, pp. 35-45.

[3] Anderson, B. D. O. & Moore, J. B. (1979). Optimal Filtering, Englewood Cliffs, NJ:Prentice-Hall.

[4] Sorenson, H. W. (1970). "Least-squares Estimation: from Gauss to Kalman," IEEE Spectrum, Vol. 7, No. 7, pp. 63-68.

[5] Mehra, R. (1970). "On the identification of variances and adaptive Kalman filtering," in IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 15, no. 2, pp. 175-184, doi: 10.1109/TAC.1970.1099422.

[6] Bélanger, P. R. (1974). Estimation of noise covariance matrices for a linear time-varying stochastic process. Automatica, 10(3): 267–275.

[7] Odelson, B. J., Rajamani, M. R. & Rawlings, J. B. (2006). A new autocovariance least-squares method for estimating noise covariances. Automatica, 42(2):303–308.

[8] Qiu, L. et al. (2019). An adaptive Kalman filter for extreme polarization effects equalization in coherent optical communication system. Opt. Commun. 445, 125–135.

[9] Rauch, H. E., Tung, F. & Striebel T. (1965). "Maximum Likelihood Estimates of Linear Dynamic Systems," AIAA J., Vol. 3, pp. 1445-1450.

[10] Rauch, H. E., Tung, F. & Striebel T. (1963). On the maximum likelihood estimates for linear dynamic systems.

[11] Bryson, A. E. & Frazier, M. (1962). "Smoothing for Linear and Nonlinear Dynamic System", Optimum System Synthesis Conf.

[12] Bierman, G. J. (1973). "Fixed interval smoothing with discrete measurements," Int. J. Cont., vol. 18, no. 1, pp. 65–75.

[13] Hartigan, L. & Wright, M. (2021). Appendix A: Estimating a Financial Conditions Index for Australia| RDP 2021-03: Financial Conditions and Downside Risk to Economic Activity in Australia. Reserve Bank of Australia Research Discussion Papers, (March).

[14] Yoon, H.K. & Rhee, K.P. (2003). Identification of hydrodynamic coefficients in ship maneuvering equations of motion by estimation-before-modeling technique. Ocean Engineering, 30(18), pp.2379-2404.

[15] Wang, Y. (2012). Position estimation using extended kalman filter and RTS-smoother in a GPS receiver. In 2012 5th international congress on image and signal processing (pp. 1718-1721). IEEE.

[16] Naidu, V.P.S., Girija, G. & Raol, J.R. (2006). Estimation of launch and impact points of a flight trajectory using UD Kalman filter/smoothen. DEFENCE SCIENCE JOURNAL-NEW DELHI-, 56(4), p.451.