Yerel Olmayan Sınır Koşulları Altında Isı Denklemi için Sınırda Sıfır Kontrol Edilebilirlik Problemi

Işıl Öner

Gebze Teknik Üniversitesi, Temel Bilimler Fakültesi,
Matematik Bölümü, Gebze, Kocaeli
ioner@gtu.edu.tr

Özetçe

Bu çalışmada ısı denklemi için yerel olmayan sınır koşulları altında sınırda kontrol edilebilir problemi ele alınmıştır. Sınırda sıfır kontrol edilebilirlik problemi, sistemin spektral özellikleri ve kontrol edilebilirlik ile gözlenebilirlik arasındaki dualite özellikleri kullanılarak moment problemine indirgenerek çözülmüştür. Moment yöntemi genel olarak öz eşlenik problemlerde kullanılmakta olup bu çalışma öz eşlenik olmayan durumda moment yöntemi ile probleme çözüm sunmaktadır.

Abstract

In this study, the problem of null boundary controllability for the heat equation with nonlocal boundary conditions is addressed. The null boundary controllability problem is reduced to a moment problem using the spectral properties of the system and the duality properties between controllability and observability. While the moment method is commonly employed for self-adjoint problems, this study provides a solution to the problem using the moment method in the case of non-self-adjoint situations.

1. Giriş

Sınırda sıfır kontrol edilebilirlik problemi, mevcut literatürde geniş bir şekilde araştırılan bir konu olup birçok araştırmacı tarafından ele alınmıştır ([1], [2], [3], [4], [5]). Bir boyutlu ve doğrusal bir model olmasına rağmen, ısı denklemi için de sınırda sıfır kontrol edilebilirlik problemi literatürde oldukça çalışılmıştır ([6], [7], [8] ,[9], [10], [11], [12]). Sentetik biyolojiden ([13]), robotiğe ([14]) birçok alanda uygulamaya sahip ([15]) olan kontrol problemleri genel olarak klasik sınır koşulları (Dirichlet, Neumann ve Robin) altında ele alınmaktadır. Ancak, klasik sınır koşulları oluşan doğal olay ve proseslerin matematiksel modellenmesinde her zaman yeterli olmamaktadır. Yerel olmayan sınır koşulları, kimyasal, fiziksel ve biyolojik birçok sistemin matematiksel modellenmesinde doğal olarak ortaya çıkan sınır koşullarından biri olup literatürde ele alınan klasik koşullardan farklı olarak özeşlenik değildir.

Bildiğimiz kadarıyla, literatürde yerel olmayan sınır koşulları altında ısı denklemleri ([18]) ile ilgili çalışmalar mevcut olmasına rağmen, yerel olmayan sınır koşullarına sahip sistemlerin kontrol edilebilirliğine bakılmamıştır. Dolayısıyla, gerçek sistemlerin matematiksel modellenmesi ile doğal olarak ortaya çıkan ve literatürde ele alınmamış yerel olmayan sınır koşullarına sahip ısı denklemi için aşağıda verilen sınırda sıfır kontrol edilebilirlik problemi ele alınacaktır:

$$\begin{aligned} &u_t = u_{xx}, \quad 0 \le x \le 1, 0 \le t \le T \\ &u(1,t) = f(t), \quad 0 \le t \le T, \\ &u_x(1,t) - u_x(0,t) - \alpha u(0,t) = 0, \quad 0 \le t \le T, \\ &u(x,0) = u^0(x), \quad 0 \le x \le 1. \end{aligned} \tag{1}$$

Burada $\alpha < 0$ keyfi reel sabit ve $u^0(x)$, $L_2(0,1)$'de, ve $f(t)$, $L_2(0,T)$'de fonsiyonlardır. Ele alınan problemde α'nın sıfıra eşit ve sıfırdan farklı olduğu durumlar için sistemin spektral analizi oldukça farklı olduğundan bu problemlerin ayrı ayrı ele alınması gerekmektedir. Fiziksel olarak, sınırda yalıtılmış (insulated) durumu modelleyen $\alpha = 0$ durumunu içeren sınırda sıfır kontrol edilebilirlik problemi [19]'da ele alınmış olup bu durumu kapsayan genel bir teori mevcut olmadığından öz fonksiyonlar ve genelleştirilmiş öz fonksiyonların açık şekilde hesaplanması ([15]) ve bu sistemin Riesz bazı oluşturması Bari teoremi (Bkz:[16], Teorem 2.1) kullanılarak doğrudan gösterilmiştir.

Bu çalışmada ise, cismin olayın meydana geldiği fiziksel ortamla alış-verişte olması durumunu modelleyen, $\alpha \neq 0$ durumu ele alınacak olup bu durumda öz fonksiyonlar için açık bir teori mevcuttur ([17]). Ancak, bu durum için öz değerler ve öz fonksiyonların transandantal bir denklemin çözümü olması ve burada asimtotlar üzerinden çalışmaya ihtiyaç duyulması problemin çözümünde bir zorluk yaratmaktadır. Ele alınacak bu sistemin iyi tanımlılığı [17]'de gösterilmiştir.

Bu çalışmada, verilen (1) sisteminin sınırda sıfır kontrol edilebilirlik problemi yerel sınır koşulları altında ele alınacak olup problemin çözümünde bir boyutlu sistemlerde etkin bir yöntem olan moment yöntemi kullanılacaktır, [6]. Çalışmanın 2. bölümünde ön sonuçlar sunulacaktır. 3. bölümde ise sistemin spektral özellikleri verilip son bölümde bu özellikler vasıtasıyla sınırda sıfır kontrol edilebilirlik problemi moment problemine indirgenerek problemin çözümü elde edilecektir.

2. Ön Sonuçlar

Öncelikle, sınırda sıfır kontrol edilebilirliği tanımlayalım.

Tanım 1 *Verilen her $u_0(x) \in L_2(0,1)$ başlangıç fonksiyonu ve $(0,1)$'daki her x için $u(x,T) = 0$ denklemini sağlayan sı-*

nırda verilmiş bir $f(t) \in L_2(0,T)$ kontrolü varsa, (1) *sistemi $T>0$ anında* ***sınırda sıfır kontrol edilebilirdir****, denir.*

Aşağıdaki yardımcı teorem, sınırda sıfır kontrol edilebilirlik problemini dualite özelliklerini kullanarak dual sistemin çözümü cinsinden ifade edebilmemize imkan vermektedir.

Yardımcı Teorem 1 (1) *sisteminin $\mathrm{T}>0$ anında sınırda sıfır kontrol edilebilir olması için gerek ve yeter şart her $u^0 \in L_2(0,1)$ başlangıç koşulu için bir $f(t) \in L_2(0,T)$ kontrolü vardır öyle ki,*

$$\int_0^1 u^0(x)\varphi(x,0)dx = \int_0^T f(t)\varphi_x(1,t)dt \tag{2}$$

denklemini her $\varphi^0 \in L_2(0,1)$ için sağlar. Burada $\varphi(x,t)$ aşağıdaki dual sistemin çözümüdür.

$$\begin{array}{c} \varphi_t + \varphi_{xx} = 0, \quad 0 \le x \le 1, 0 \le t \le T, \\ \varphi(1,t) - \varphi(0,t) = 0, \quad 0 \le t \le T, \\ \varphi_x(0,t) + \alpha\varphi(0,t) = 0, \quad 0 \le t \le T, \\ \varphi(x,T) = \varphi^0(x), \quad 0 \le x \le 1. \end{array} \tag{3}$$

İspat: $f(t)$, $L_2(0,T)$'de keyfi bir fonksiyon, $u(x,t)$ verilen (1) sisteminin ve $\varphi(x,t)$ ise (3) sisteminin çözümleri olsun. (1) denklemini $\varphi(x,t)$ ile çarpıp verilen bölge üzerinde integralleyip kısmı integrasyon uygularsak,

$$\begin{aligned} \int_0^1 u(x,T)\varphi^0(x)dx - \int_0^1 u^0(x)\varphi(x,0)dx \\ + \int_0^T f(t)\varphi_x(1,t)dt = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

elde edilir. Bu denklemde (2) eşitliğini yerine yazarsak tüm $\varphi^0(x)$ 'ler için $\int_0^1 u(x,T)\varphi^0(x)dx = 0$ elde edilir ve bundan dolayı $u(x,T)=0$ olur. Tersine, (1) sistemi kontrol edilebilir olsun yani $u(x,T)=0$. Bu eşitliği (4) denkleminde göz önüne alırsak (2) elde edilir.

Verilen (1) sisteminin sınırda sıfır kontrol edilebilirliğinin gösterilebilmesi için (3) sisteminin çözümünün bulunması gerekmektedir. Bu nedenle (3) sisteminin yardımcı spektral problemi bir sonraki bölümde ele alınacak olup buradaki bilgiler [17]'den alınmıştır.

3. Yardımcı spektral problemler

(3) sisteminin çözümünü bulmak için değişkenlerin ayrılması yöntemini kullanacağız. Eğer $\varphi(x,t) = \mathrm{X}(x)T(t)$ dersek

$$\begin{aligned} &\mathrm{X}'' + \lambda\mathrm{X} = 0 \\ &\mathrm{X}'(0) + \alpha\mathrm{X}(0) = 0 \\ &\mathrm{X}(1) = \mathrm{X}(0) \end{aligned} \tag{5}$$

yardımcı spektral problemi elde edilir. Bu problemin öz değerleri $\lambda_n, n=0,1,\ldots$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \lambda_{2n} &= (2n\pi)^2, \quad n=1,2,\ldots \\ \lambda_{2n-1} &= (\mu_n)^2, \quad n=1,2,\ldots \\ \lambda_0 &= \begin{cases} \mu_0^2, & \alpha<0 \\ -s_0^2, & \alpha>0 \end{cases} \end{aligned}$$

şeklindedir. Burada $\alpha<0$ durumu ele alınacak olup μ_n'ler

$$\mu(1-\cos\mu) + \alpha\sin\mu = 0 \tag{6}$$

denkleminin pozitif monoton artan çözümleridir ve $\mu_n = 2n\pi + O(1) \in (2n\pi, 2n\pi+\pi), n=0,1,2,\ldots$ sağlanır. Sistemin öz fonksiyonları ise aşağıdaki şekildedir.

$$\begin{aligned} &\mathrm{X}_{2n}(x) = \cos(2\pi nx) - \frac{\alpha}{2\pi n}\sin(2\pi nx), \quad n=1,2,\ldots \\ &\mathrm{X}_{2n-1}(x) = \cos(\mu_n x) - \frac{\alpha}{\mu_n}\sin(\mu_n x), \quad n=1,2,\ldots, \\ &\mathrm{X}_0(x) = \cos(\mu_0 x) - \frac{\alpha}{\mu_0}\sin(\mu_0 x) \end{aligned} \tag{7}$$

(5)'in duali aşağıdaki şekildedir.

$$\begin{cases} \mathrm{Y}''(x) + \lambda\mathrm{Y}(x) = 0, \quad 0 \le x \le 1, \\ \mathrm{Y}(1) = 0, \quad \mathrm{Y}'(1) - \mathrm{Y}'(0) - \alpha\mathrm{Y}(0) = 0. \end{cases} \tag{8}$$

Bu problemin özdeğerleri de (5) probleminin özdeğerleri ile aynı olup özfonksiyonları aşağıdaki forma sahiptir.

$$\begin{aligned} &\mathrm{Y}_{2n}(x) = \frac{-4n\pi}{\alpha}\sin(2n\pi x), \quad n=1,2,\ldots \\ &\mathrm{Y}_{2n-1}(x) = \frac{2\mu_n\left[\left(\mu_n^2-\alpha^2\right)\sin(\mu_n x) + 2\alpha\mu_n\cos(\mu_n x)\right]}{\alpha\left(\mu_n^2+\alpha^2-2\alpha\right)}, n=1,2,\ldots \\ &\mathrm{Y}_0(x) = \frac{2\mu_0\left[\left(\mu_0^2-\alpha^2\right)\sin(\mu_0 x) + 2\alpha\mu_0\cos(\mu_0 x)\right]}{\alpha\left(\mu_0^2+\alpha^2-2\alpha\right)}. \end{aligned} \tag{9}$$

Ayrıca, bu özfonksiyon aileleri için aşağıdaki yardımcı teorem doğrudur [17].

Yardımcı Teorem 2 (7) *ve* (9) *sistemleri* $[0,1]$ *aralığında biortogonal fonksiyonlar sistemi olşturur yani pozitif olmayan tüm i ve j tamsayıları için*

$$\int_0^1 \mathrm{X}_i\mathrm{Y}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \ne j \end{cases}$$

sağlanır.

(5)'de verilen sınır koşullarını sağlayan herhangi bir fonksiyon [20]'de verilen Teorem 5.3 gereği (7)'da verilen özfonksiyonlar kullanılarak düzgün yakınsak bir seriye açılabilir. Ayrıca, $\{\mathrm{X}_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, dizisi $L_2[0,1]$'de bir bazdır (Bkz: [21]).

Buna göre (3) sisteminin çözümü seri toplamı olarak aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$\begin{aligned} \varphi(x,t) = e^{-\mu_0^2(T-t)}\beta_0\mathrm{X}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(2n\pi)^2(T-t)}\beta_{2n}\mathrm{X}_{2n} \\ + e^{-\mu_n^2(T-t)}\beta_{2n-1}\mathrm{X}_{2n-1}. \end{aligned} \tag{10}$$

Burada, $\beta_n = (\varphi(x,T), \mathrm{Y}_n), n=0,1,2,\ldots$ olup çözümün varlığı ve tekliği [17]'de gösterilmiştir. Şimdi bu çalışmanın ana teoremini verebiliriz.

4. Sınırda sıfır kontrol edilebilirlik

Teorem 3 *Verilen* (1) *sisteminin* $T > 0$ *anında sınırda sıfır kontrol edilebilir olması için gerek ve yeter şart*

$$u^0(x) = \eta_0 \mathrm{Y}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \eta_{2n-1} \mathrm{Y}_{2n-1} + \eta_{2n} \mathrm{Y}_{2n},$$

seri açılımına sahip herhangi bir $u^0 \in L_2(0,1)$ *başlangıç koşulu için*

$$\begin{aligned}
&\int_0^T v(t) e^{-\mu_0^2 t} dt = \frac{\eta_0 e^{-\mu_0^2 T}}{-\alpha} \\
&\int_0^T v(t) e^{-(2n\pi)^2 t} dt = \frac{\eta_{2n} e^{-(2n\pi)^2 T}}{-\alpha} \qquad n = 1, 2, \cdots \\
&\int_0^T v(t) e^{-\mu_n^2 t} dt = \frac{\eta_{2n-1} e^{-\mu_n^2 T}}{-\alpha} \quad n = 1, 2, \cdots
\end{aligned} \tag{11}$$

denklemlerini sağlayan bir $v(t) \in L_2(0,T)$ *kontrol fonksiyonu bulunmasıdır. Burada* $\eta_n = (u^0(x), \mathrm{X}_n)$, $n = 0, 1, \ldots$ *şeklinde tanımlıdır.*

İspat: Yardımcı Teorem 1'den (1) sisteminin sınırda sıfır kontrol edilebilir olması için gerek ve yeter şart (2) denklemini sağlamasıdır. Bu denklemde $\varphi(x,t)$ve $u^0(x)$ değerlerini yerine yazarsak

$$\begin{aligned}
& e^{-\mu_0^2 T} \beta_0 \eta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [e^{-(2n\pi)^2 T} \beta_{2n} \eta_{2n} + e^{-\mu_n^2 T} \beta_{2n-1} \eta_{2n-1}] \\
&= \int_0^T f(t) \Bigg[e^{-\mu_0^2 (T-t)} \beta_0 (-\mu_0 \sin \mu_0 - \alpha \cos \mu_0) \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} [e^{-(2n\pi)^2 (T-t)} \beta_{2n} (-\alpha) \\
&+ e^{-\mu_n^2 (T-t)} \beta_{2n-1} (-\mu_n \sin \mu_n - \alpha \cos \mu_n)] \Bigg] dt
\end{aligned} \tag{12}$$

elde edilir. (7) ve (9) fonksiyonlar sistemi $L_2(0,1)$'de biortonormal fonksiyonlar olduğundan (2) eşitliği ancak ve ancak $\varphi(x,T) = \mathrm{X}_m(x), m = 0, 1, ..$ seçersek sağlanır. Buradan, $\beta_n = (\varphi(x,T), \mathrm{Y}_n) = (\mathrm{X}_m(x), \mathrm{Y}_n) = \delta_{n,m} \quad n, m = 0, 1, 2, \ldots$ olur. Bunu (12) denkleminde yerine yazarsak

$$\begin{aligned}
&\int_0^T f(t) e^{-\mu_0^2 (T-t)} (-\mu_0 \sin \mu_0 - \alpha \cos \mu_0) dt = \eta_0 e^{-\mu_0^2 T} \\
&\int_0^T f(t) e^{-(2n\pi)^2 (T-t)} (-\alpha) dt = \eta_{2n} e^{-(2n\pi)^2 T} \\
&\int_0^T f(t) e^{-\mu_n^2 (T-t)} (-\mu_n \sin \mu_n - \alpha \cos \mu_n) dt = \eta_{2n-1} e^{-\mu_n^2 T} \\
&n = 1, 2, \cdots
\end{aligned}$$

elde edilir. (6) eşitliği

$$-\mu_n \sin \mu_n - \alpha \cos \mu_n$$

$n = 0, 1, \ldots$ ifadesinde göz önüne alınır ve son integrallerde $T - t$, t ile değiştirilip $f(T-t) := v(t)$ şeklinde tanımlanırsa ispat biter.

Teoremden görüldüğü üzere $f(t)$ kontrol fonksiyonunu bulmak için (11) denklemlerini sağlayan $v(t)$ fonksiyonunu bulmalıyız. Bu problem $L_2(0,T)$'te $\Lambda = \{e^{-\lambda_m t}\}_{m \geq 0}$ ailesine göre moment problemi olarak adlandırılır. $L_2(0,T)$'te Λ kümesine biortogonal olan $\{\Phi_n\}_{n \geq 0}$ fonksiyonlarını oluşturabileceğimizi varsayalım. Öyle ki tüm $m, n = 0, 1, 2 \ldots$'ler için

$$\int_0^T e^{-\lambda_m t} \Phi_n(t) dt = \delta_{m,n} = \begin{cases} 1, \text{ if } n = m \\ 0, \text{ if } n \neq m \end{cases}$$

sağlanır. Bu durumda

$$\begin{aligned}
f(t) = & \frac{\eta_0 e^{-\mu_0^2 T}}{-\alpha} \Phi_0(t) \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\eta_{2n} e^{-(2n\pi)^2 T}}{-\alpha} \Phi_{2n}(t) \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\eta_{2n-1} e^{-\mu_n^2 T}}{-\alpha} \Phi_{2n-1}(t)
\end{aligned} \tag{13}$$

seçersek (11) denklemlerinin çözümü vardır. Çünkü Muntz's Teoremine göre (Bkz:[22] Teorem 2.4.1)

$$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{\lambda_n} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{\lambda_n} < \infty \tag{14}$$

sağladığında biortogonal $\{\Phi_n\}_{n \geq 0}$ dizisi mevcuttur. Ayrıca, $f(t)$ fonksiyonu $L_2(0,T)$'de yakınsaktır (Bkz: [6]).

5. Sonuçlar

Bu çalışmada, verilen sistemin yerel olmayan sınır koşulları altında sınırda sıfır kontrol edilebilirlik problemi için gerek ve yeter koşullar sunulmuştur. Yerel olmayan sınır koşulları altında özeşlenik olmayan bu problem, kontrol edilebilirlik ve gözlenebilirlik arasındaki dualite ve sistemin spektral özellikleri kullanılarak moment problemine indirgenerek çözülmüştür.

6. Kaynakça

[1] K. Bhandari and F. Boyer, ”Boundary null-controllability of coupled parabolic systems with Robin conditions” *Evolution Equations and Control Theory*, Vol.10, pp.61-102. 2021.

[2] E. H. Samb, "Boundary null-controllability of two coupled parabolic equations: simultaneous condensation of eigenvalues and eigenfunctions", *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, Vol.27, S29 2021.

[3] F. W Chaves-Silva,J. P. Puel, and M. C. Santos, “Boundary null controllability as the limit of internal controllability: The heat case”. *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations* , Vol:26, 2020.

[4] K. Kalimeris and T. Özsarı, “An elementary proof of the lack of null controllability for the heat equation on the half line”. *Applied Mathematics Letters*, Vol:104, 106241, 2020.

[5] P. Martin, L. Rosier, and P. Rouchon, "Controllability of some evolution equations by the flatness approach", *Trends in Control and Inverse Problems*, Vol.1, 2018.

[6] H. Fattorini and D. L. Russell,“Exact controllability theorems for linear parabolic equations in one space dimension”,*Arch. Rational Mech. Anal.*, 43, 272–292,1971.

[7] O. Y. Emanuilov,*Controllability of parabolic equations*, Mat. Sb, Vol. 186, pp. 109-32,1995.

[8] G. Lebeau and L. Robbiano, “Contróle Exact De Léquation De La Chaleur”, *Communications in Partial Differential Equations*, Informa UK Limited Vol.20, pp.335-356, 1995.

[9] E. Fernández-Cara, M. González-Burgos, S. Guerrero, and J. Puel, “Null controllability of the heat equation with boundary Fourier conditions: the linear case”, *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variation*s, Vol.12, No.3,pp.442-465, 2006.

[10] C. Fabre, J. Puel and E. Zuazua, “Approximate controllability of the semilinear heat equation”, *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics*, Vol.125, No. 1, pp.31-61,1995.

[11] P. Martin, L. Rosier and P. Rouchon, “Null controllability of one-dimensional parabolic equations by the flatness approach”, *SIAM J. Control Optim.*,Vol.54, pp.198-220,2016 .

[12] E. Zuazua, *Controllability and Observability of Partial Differential Equations: Some Results and Open Problems*, North-Holland: Handbook of Differential Equations: Evolutionary Equations, Vol.3, pp. 527-621, 2007.

[13] D. Del Vecchio, Y. Qian, R. M. Murray and E. D. Sontag, “Future systems and control research in synthetic biology”, *Annual Reviews in Control*, Vol.45, pp.5-17, 2018.

[14] M. K. Helwa and A. P Schoellig, “On the construction of safe controllable regions for affine systems with applications to robotics”, *Automatica*, Vol.98, pp. 323-330, 2018.

[15] D. Ruiz-Balet, E. Zuazua, “Control of certain parabolic models from biology and social sciences”. *Doctoral. China*, ffhal-02453829v2f. 2019.

[15] N. I. Ionkin, “The solution of a certain boundary value problem of the theory of heat conduction with a nonclassical boundary condition”, *Differ. Uravn.*, Vol.13, pp. 294–304,1977.

[16] I. C. Gohberg and M. G. Kreĭn, “Introduction to the theory of linear nonselfadjoint operators in Hilbert Space “ *American Mathematical Society*, 1969.

[17] N. B. Kerimov and M. I. Ismailov, "An inverse coefficient problem for the heat equation in the case of nonlocal boundary conditions," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 396 No. 2, pp. 546-554, 2012.

[18] U. Biccari and V. Hernández-Santamaría, “Null Controllability of Linear and Semilinear Nonlocal Heat Equations with an Additive Integral Kernel”, *SIAM J. Control Optim.*, Vol.57, No.4, pp. 2924–2938, 2019.

[19] M. I. Ismailov and I. Oner. "Null boundary controllability for some biological and chemical diffusion problems", *Evolution Equations and Control Theory*, Vol. 12, No.5: pp 1287-1299, 2023.

[20] M. A. Naimark, *Linear Differential Operators: Elementary Theory of Linear Differential Operators*, Frederick Ungar Publishing Co., New York, 1967.

[21] A. A. Shkalikov, "On the basis problem of the eigenfunctions of an ordinary differential operator", *Russ. Math. Surv.*, Vol.34, No:5,pp. 249–250, 1979.

[22] W. Krabs, *On moment theory and controllability of one-dimensional vibrating systems and heating processes*, Springer-Verlag,1992.