

# Kanatçık Tahrik Sistemi İçin Doğrusal Matris Eşitsizlikleri Yöntemi Kullanılarak Doğrusal Karesel Düzenleyici(LQR) Kontrolcüsü Tasarımı ve Uygulanması

## LQR Controller Design and Implementation Using Linear Matrix Inequalities Method For Fin Actuation System

İsmail CANTÜRK

Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu, Savunma Sanayii Araştırma ve Geliştirme Enstitüsü (TÜBİTAK-SAGE), ANKARA

ismail.canturk@tubitak.gov.tr

### Özetçe

Güdümlü mühimmatlar; temel olarak, bir güdüm algoritmasına bağlı olarak çalışan ve hedefi yüksek hassasiyetle vuran bombalardır. Güdümlü mühimmatların, hedefe yönlendirilmesi ve istenilen hedefin başarılı bir şekilde vurulabilmesi, Kanatçık Tahrik Sistemleri(KTS) aracılığı ile gerçekleştirilir. Bu yüzden, KTS için tasarlanacak olan kontrolcüler önem kazanmaktadır. Bu çalışmada, elektromekanik bir servo sistem olan kanatçık tahrik sisteminin, deneysel sistem tanımlama yöntemiyle sistem modelinin çıkarılması ve elde edilen bu model kullanılarak, doğrusal matris eşitsizlikleri yöntemi aracılığı ile Doğrusal Karesel Düzenleyici (İng. LQR) tasarımı ve gerçek bir sisteme uygulanması anlatılmaktadır. Doğrusal Karesel Düzenleyici probleminin çözümü için literatürde Riccati eşitliği ve Doğrusal Matris Eşitsizlikleri yöntemi olmak üzere 2 yöntem olmak ile birlikte, bu çalışmada Doğrusal Matris Eşitsizlikleri(İng. LMI) yöntemi tercih edilmiş ve Riccati eşitliği yöntemi ile kıyaslanmıştır.

### Abstract

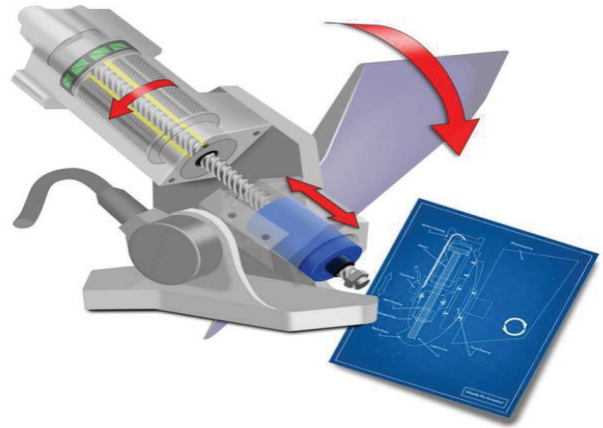
Guided ammunitions are essentially bombs that work under a guidance algorithm and destroy the target with high precision. Guidance of the ammunition to the target and destruction of the target is successfully realized by Fin Actuation System(FAS). Therefore, designing of FAS's controllers are very important. In this study, being an electromechanical servo system, Fin Actuation System's mathematical model is obtained with experimental system identification, and using this model throughout Linear Matrix Inequalities (LMI's), LQR controller design and implementation of a real-time system are explained. Despite the fact that there are two different solutions in the literature for the LQR problem, such as Riccati Equality and Linear Matrix Inequalities, LMI method is preferred for this study and compared with Riccati equality method.

### 1. Giriş

Güdümlü bir mühimmatın Kanatçık Tahrik Sistemi (KTS) ; temel olarak, güdüm algoritmasından aldığı kanatçık emirlerini, KTS mekanizmaları aracılığı ile gerçekleştiren kanatçık

yüzeyleyir. Şekil 1'de gösterilen bir KTS mekanizması temel olarak; bir fırçasız doğru akım elektrik motoru, elektrik motoru çıkışına bağlı olan ve dönel hareketi, doğrusal harekete çeviren mekanik bir eleman ve bu mekanik eleman vasıtasıyla mühimmatın kanatçıklarını çeviren aktarma kolundan oluşmaktadır [1]. Güdümlü bir mühimmatın Kanatçık Tahrik Sistemi; mühimmatın hedefe yönelimini sağlayan ve mühimmatın gerekli manevraları gerçekleştirmesini sağlayan en önemli kısımlardan biridir [2]. Güdümlü bir mühimmat; uçuş boyunca çevresel etkilerle birlikte, çeşitli gürültüler ve bozucu etkiler altındadır. Bu yüzden KTS için tasarlanacak olan kontrolcülerin, bozucu etkiler altında da ve ek olarak kısa oturma zamanı, bant genişliği gibi diğer performans gereksinimlerini de karşılaması beklenmektedir [3].

Doğrusal matris eşitsizlikleri (DME), sistem ve kontrol teorisinde çok yaygın biçimde kullanılmaktadır. DME' ler ilk olarak Lyapunov' un çalışmalarında karşımıza çıkar. 1892' de yapmış olduğu çalışmada Lyapunov göstermiştir ki;  $\dot{x} = Ax$  formundaki diferansiyel bir denklemin asimptotik kararlılığı P pozitif tanımlı bir matris olmak üzere;  $A^T P + P A < 0$  biçimindeki bir matris eşitsizliği ile ortaya konabilir [4].



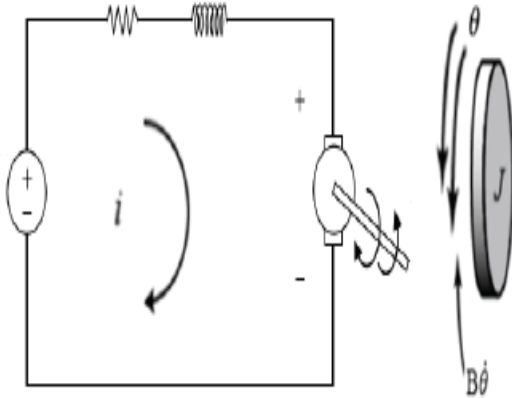
Şekil 1. KTS mekanizması [2]

Doğrusal matris eşitsizliği, dışbükey(Konveks) bir kısıt ifade eder. Bu sebeple dışbükey amaç fonksiyonlarına sahip eniyileme problemleri ve DME kısıtları, bazı hazır yazılımlar yardımıyla etkin bir biçimde kolaylıkla çözülebilmektedir [5]. Doğrusal eşitsizlikler, dışbükey karesel eşitsizlikler, matris norm eşitsizlikleri ve kontrol teorisinden kullanılan Lyapunov ve Riccati eşitsizlikleri gibi birtakım ifadelerin tümü DME' ler şeklinde yazılabilmektedirler [6].

Ayrıca çok sayıda DME söz konusu olduğunda, bunların hepsini daha büyük boyutlu tek bir DME olarak yazmak da mümkün olmaktadır. Bu durum, DME'leri çok çeşitli en iyileme ve kontrol problemlerinin çözümüne yönelik faydalı bir araç haline getirmiştir. Sistem ve kontrol teorisinde yer alan ve analitik olarak çözülemeyen çoğu DME problemi sayısal olarak ele alınmış ve İç Nokta algoritması yoluyla çözülmüştür. DME'lere dayalı dışbükey en iyileme yoluyla ele alınan kontrol sistemlerine ait çeşitli problemler de İç Nokta algoritmaları yoluyla kolaylıkla çözülebilmektedirler. DME problemleri için bu algoritmaların etkinliği sayısal çalışmalar yoluyla ortaya konulmuştur [7].

## 2. Sistem Tanımlama ve KTS'nin Modellenmesi

Bu bölümde, KTS matematiksel olarak modellenecek ve KTS parametreleri sistem tanımlama yöntemiyle deneysel olarak elde edilecektir. KTS'nin transfer fonksiyonu, giriş; motor akımı ve çıktısı da motor konumu olmak üzere elde edilecektir. Şekil 2, temel olarak fırçalı bir doğru akım motoru kullanılarak oluşturulan elektromekanik modellemeyi gösterse de fırçasız doğru akım motoru kullanıldığı durumda da matematiksel denklemler değişmeyecektir. Motor devresinin elektriksel dinamikleri, yüksek bir dinamiğe sahip olduğundan dolayı motorun mekanik dinamiklerinin yanında ihmal edilecektir.  $J$  ve  $B$ ; sırasıyla elektrik motorunun miline indirgenmiş atalet ve sönümlenme katsayılarını belirtmektedir.  $K_t$  ise elektrik motorunun tork sabitini,  $\theta$  motor açısını,  $\dot{\theta}$  motor açısının hızını,  $i$  ise motor akımını göstermektedir.



Şekil 2. KTS modellenmesi.

Gerekli dinamik eşitlikler, denklem (1) ve (2)'de yazılmış ve motor miline indirgenmiş KTS transfer fonksiyonu, denklem (3)'de elde edilmiştir.

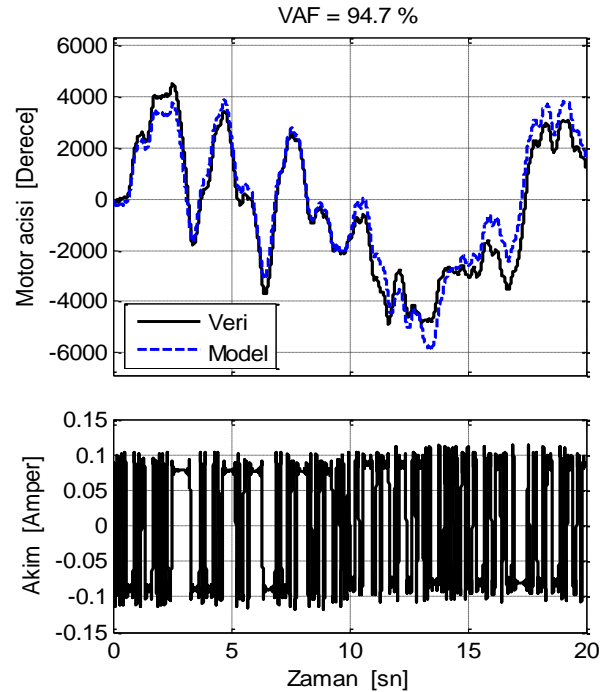
$$J\ddot{\theta} + B\dot{\theta} = K_t i \quad (1)$$

Başlangıç sınır koşulu 0 alınarak, Laplace düzleminde, motor akımı ile motor konumu arasındaki transfer fonksiyonu, denklem (1) kullanılarak denklem (2)'deki gibi elde edilir.

$$\theta(s)[Js^2 + Bs] = K_t i(s) \quad (2)$$

$$P(s) = \frac{\theta(s)}{i(s)} = \frac{K_t}{Js^2 + Bs} = \frac{K_t/B}{s(\frac{J}{B}s + 1)} \quad (3)$$

Denklem (3)'de gösterilen  $K_t$  ve  $J$  değerleri bilinmektedir. KTS modelini elde edebilmek için  $B$  değerinin bilinmesi gerekmektedir.  $B$  değerini elde edebilmek için deneysel sistem tanımlama çalışmaları yapılması gerekmektedir. Sistem tanımlama çalışmaları ile fiziksel bir sistemin matematiksel modeli, deneysel olarak elde edilebilir. Temel olarak, sisteme uygulanan giriş ve çıkış sinyalleri kullanılarak sistemin matematiksel denkleminin elde edilmesi amaçlanır [8]. Sisteme uygulayacağımız sinyaller; sistemin çalışma frekansı veya bant genişliğini sağlamasının yanı sıra, yeterince zengin içerikli olmalıdır. Bu bağlamda, farklı frekans ve genliklere sahip ve uygun çalışma aralığında sistemi uyarabilecek, PRBS ve beyaz gürültü sinyalleri KTS'ye uygulanmıştır. Uygulanan sinyaller sonucu motor açısı konumu ölçülmüş ve motor açısı konumu ile motor akımı arasındaki transfer fonksiyonu doğrusal bir yapıda olduğu kabulü ile MATLAB'ın sistem tanımlama aracı kullanılarak deneysel olarak elde edilmiştir. Şekil 3'de en yüksek benzerlik oranının gerçekleştiği sinyal görünmektedir. VAF değeri ise, sisteme uygulanan sinyal sonucu elde edilen matematiksel modelin, sistemi ne oranda doğruluk ile temsil ettiğinin ölçütüdür [9]. Deneysel sistem tanımlama çalışmaları sonucunda KTS modeli, denklem (4)'de verildiği gibi elde edilmiştir.



Şekil 3. KTS'ye uygulanan ve en yüksek benzerlik oranının gerçekleştiği sinyal

$$G(s) = \frac{82400}{s(0.132s + 1)} \quad (4)$$

LQR tipinde bir kontrolcü sentezi için sistem modelinin durum-uzay gösteriminin elde edilmesi gerekmektedir. Denklem (5) ve (6)'da KTS'nin durum uzayı gösteriminin elde edilmesi anlatılmaktadır.



$$K = R^{-1}B^T L^{-1} \quad (18)$$

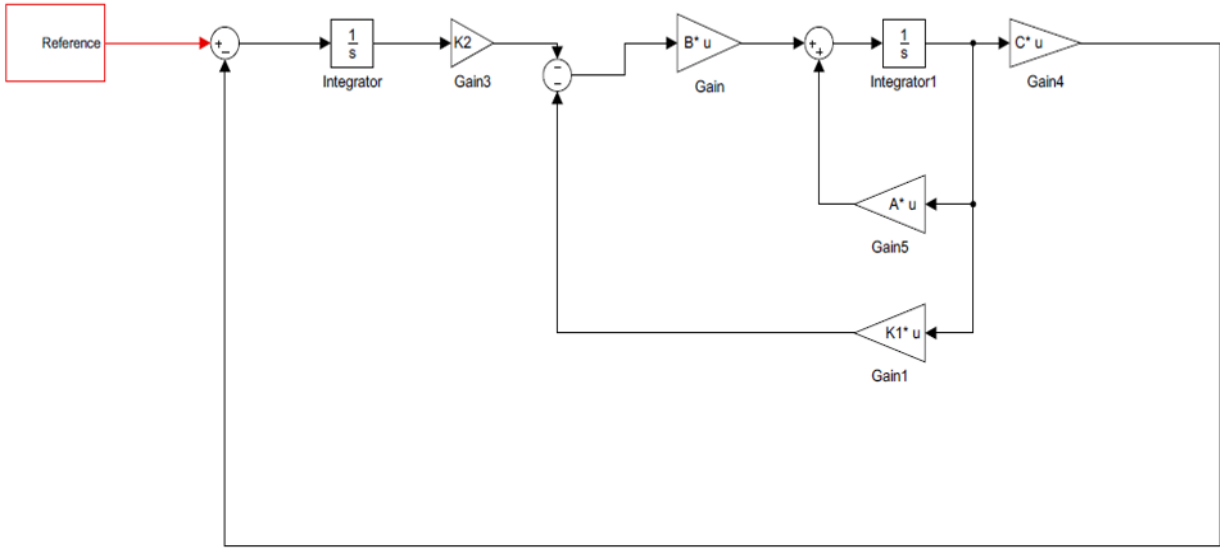
$$Q = \begin{bmatrix} 50 & 0 \\ 0 & 0.001 \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$R = 10000 \quad (20)$$

$$K = [0.725 \quad 0.013] \quad (21)$$

### 3.2 DME ile LQI Tipi Kontrolcü tasarımı

LQR tipi kontrolcü tasarımında integral etkisi olmadığından özellikle bozucu etkenler altında kalıcı durum hatası meydana gelmektedir. Bundan dolayı, integratör içeren LQI tipi kontrol yöntemi, bozucu etkiler altında da iyi sonuçlar verdiği için tercih edilmektedir [12]. Hata durumu  $e$ 'yi de içeren yeni sistem durum uzay formu ve durum matrisleri, denklem (22) ve denklem (23)'de verildiği gibi yeniden oluşturulmuştur. Şekil 4, LQI yapısının şematik gösterimini ifade etmektedir.



Şekil 4. LQI kontrol yapısı simulink modeli

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} i \quad (22)$$

$$A_z = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix}, B_z = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \quad (23)$$

LQI problemi için minimize edilecek maliyet fonksiyonu  $J_z$  denklem (24)'de aşağıdaki gibi belirlenmiştir.

$$J_z = \int_0^{\infty} (z^T Q_z z + u_z^T R u_z) dt \quad (24)$$

Denklem (24)'deki maliyet fonksiyonunu minimize eden optimal kontrolcü kazançları olan  $K1$  ve  $K2$ , yine denklem (17)'deki DME'ler kullanılarak denklem (27)'deki gibi elde edilmiştir.

$$Q_z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$R = 0.1 \quad (26)$$

$$K = [K1 \ K2] = [0.17 \ 0.012 \ 9.79] \quad (27)$$

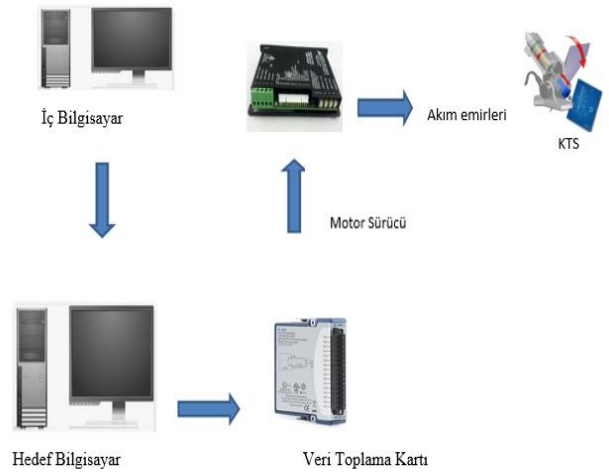
$$K1 = [0.17 \ 0.012]$$

$$K2 = [9.79]$$

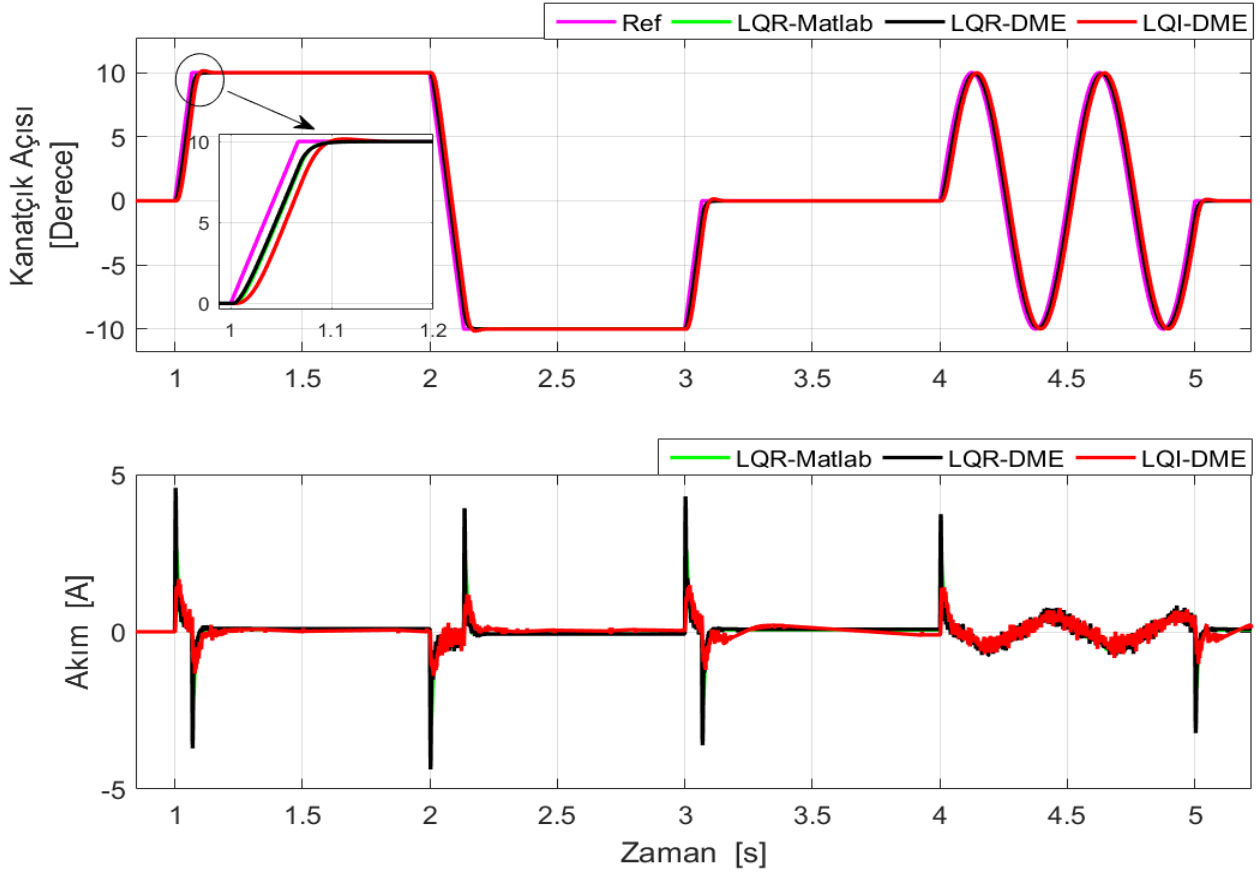
## 4. Döngüde Donanım Testleri

Tasarlanan kontrolcüler, MATLAB'ın xPC target gerçek zamanlı işletim sistemi aracılığı ile KTS'ye gerçek zamanlı olarak uygulanmıştır. Encoder yardımıyla toplanan motorun konum verileri, veri toplama kartları ile okunmuştur. Elde edilen kontrolcüler, KTS'ye uygulamak için motor sürücüsü kullanılmıştır. Sisteme gönderilecek akım emirleri, bu motor sürücüsü tarafından sağlanır. Sistemi çalıştırmak için gerekli olan enerji ise 28V gerilim değerine sahip güç kaynağından karşılanmaktadır. Şekil 4, KTS testleri için kullanılan test düzeneğine ait bilgileri göstermektedir. KTS için, yüksüz ve yüklü olmak üzere 2 farklı döngüde donanım testleri yapılmış ve DME tabanlı LQR ve LQI kontrolcü ile Matlab'in LQR komutunun sonuçları karşılaştırılmıştır. Yüksüz test, KTS'nin kanatçıklarına yük gelmediğinin varsayıldığı durumdur. Yüklü test'te ise, 1.5 sn'de genliği 10 N.m olan basamak tipindeki bozucunun KTS kanatçıklarına geldiği varsayılmıştır.

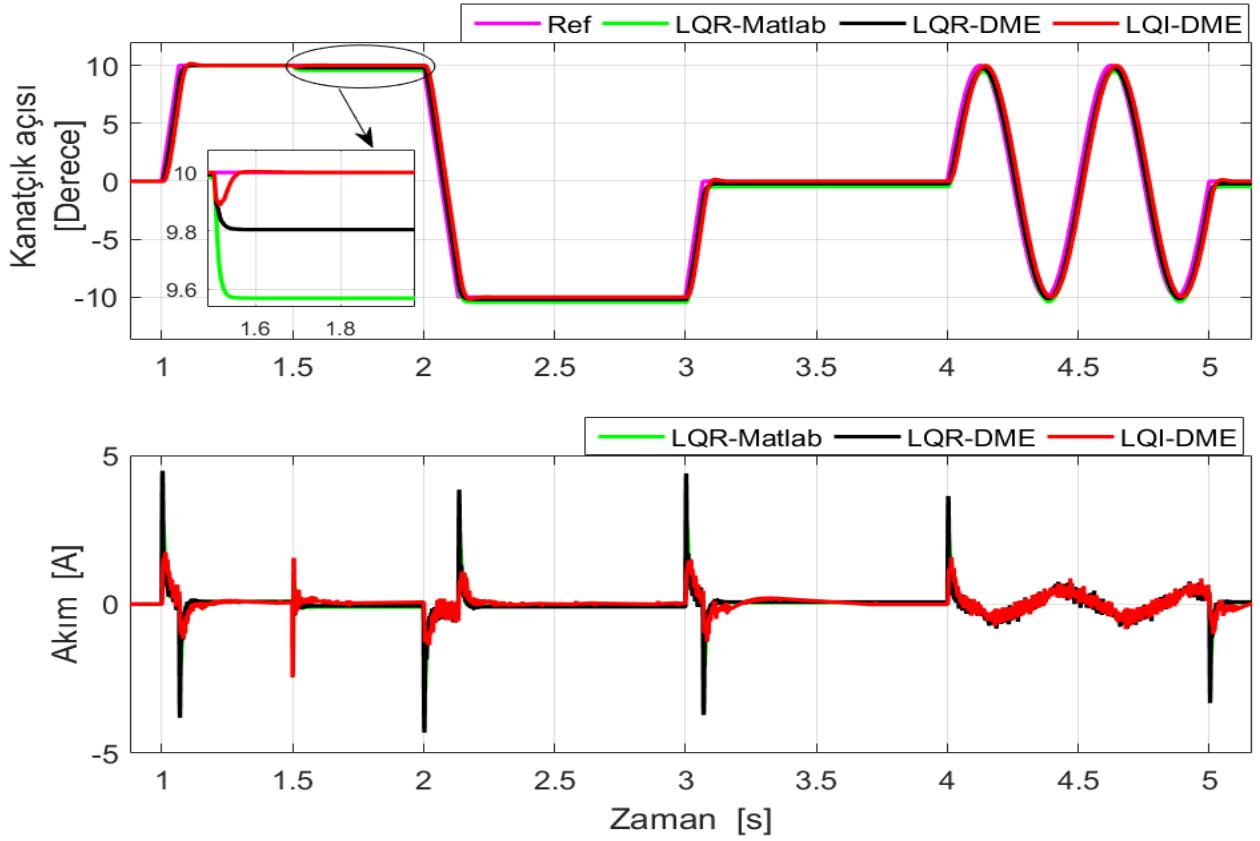
Şekil 5 ve Şekil 6, bu testlere ait grafikleri, Tablo 1 ve Tablo 2 ise test sonuçlarını göstermektedir.



Şekil 4. KTS test düzeneği



Şekil 5. Yüksüz test sonuçları



Şekil 6. Yüklü test sonuçları

**Tablo 1.** Yüksüz test sonuçları

Başarım sonucu	Değer (LQR-DME)	Değer (LQR-Matlab)	Değer (LQI-DME)	İster(En fazla)
Oturma zamanı [saniye]	0.15	0.15	0.17	0.5
Kalıcı durum hatası [derece]	0.01	0.01	0	0.5
Aşım [%]	0	0	1.1	5
Tepe Amper değeri [A]	4.8	2.8	1.8	7.5

**Tablo 2.** Yüklü test sonuçları

Başarım sonucu	Değer (LQR-DME)	Değer (LQR-Matlab)	Değer (LQI-DME)	İster(En fazla)
Oturma zamanı [saniye]	0.15	0.15	0.17	0.5
Kalıcı durum hatası [derece]	0.2	0.42	0	0.5
Aşım [%]	0	0	1.1	5
Tepe Amper değeri [A]	4.8	2.9	2.4	7.5

## 5. Sonuçlar

Bu çalışmada, Doğrusal Karesel Düzenleyici tipindeki kontrolcüler, Doğrusal Matris Eşitsizlikleri yardımıyla elde edilmiştir. KTS için tasarımı yapılan DME tabanlı kontrolcüler ile yüksüz ve yüklü olmak üzere döngüde donanım testleri yapılmıştır. Yüksüz test sonuçları incelendiğinde, DME tabanlı LQR kontrolcü, Matlab'in LQR komutu ile elde edilen kontrolcünün ve DME tabanlı LQI kontrolcünün takip performanslarının birbirine yakın olduğu görülmüştür. Tek fark, KTS'ye uygulanan akım değerlerinde gözükmektedir. Yüklü test sonuçlarında ise, yükün uygulandığı süreden sonra, LQR yapısındaki kontrolcüler beklenildiği üzere bozucu etkileri bastıramamış ve kalıcı durum hatası meydana gelmiştir. LQI yapısında ise, integratör etkisinden dolayı kalıcı durum hatası olmadan bozucuları bastırabilmiştir. Bundan dolayı bozucu etkiler altında çalışacak olan KTS gibi silah sistemleri için LQI yapısındaki kontrolcülerin kullanımı daha uygundur.

## Teşekkür

Bu çalışma boyunca sağladığı olanak ve katkılardan dolayı TÜBİTAK SAGE'ye teşekkür ederiz.

## Kaynakça

- [1] E. Daş, İ. Delice, Murat K, "Analysis and robust position control of an electromechanical control actuation system", *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, Cilt: 42, s: 628-640, 2020.
- [2] İsmail. C, Gündümlü bir Mühimmatın Kanatçık Tahrik Sistemi İçin Gürbüz Kontrolcü Tasarımı ve Uygulanması, Yüksek Lisans Tezi, TOBB ETÜ, Ankara, 2020.
- [3] E. Daş, Gündümlü Bir Mühimmat Kanatçık Tahrik Sistemi için İki Döngülü Kontrol Sistemi Tasarımı, Yüksek Lisans Tezi, İTÜ, İstanbul, 2014.
- [4] Kaczorek, T. "LMI approach to stability of 2D positive systems", *Multidimensional Systems and Signal Processing*, Cilt : 20(1), s:39-54, 2009.
- [5] Löfberg, J. YALMIP: "A Toolbox for Modeling and Optimization in MATLAB", *In Proceedings of the CACSD Conference*, New Orleans, LA, USA, s: 284-289, 2004.
- [6] Nesterov, Y. and Nemirovsky, A., " An interior point method for generalized linear-fractional programming" *Mathematical Programming*, Cilt: 69, s:177-204, 1995.
- [7] Lam, H. K., Leung, F. H. F., "Stability Analysis of Fuzzy-Model-Based Control Systems: Linear-Matrix-Inequality Approach", Springer, Berlin, Germany, 2011.
- [8] Salloum, R., Arvan, M. R., Moaveni, B., "Identification, uncertainty modelling and robust controller design for an electromechanical actuator", *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering*, Cilt: 230, s: 3631-3641, 2016.
- [9] Chen, T., Ljung, L., "Implementation of algorithms for tuning parameters in regularized least squares problems in system identification", *Automatica*, Cilt: 50, s:213-222, 2013.
- [10] Skariya, S., Sebastian, B., Namboodiripad, M., "Integrated Optimal Control of Reusable Launch Vehicle and Actuation system using Linear Quadratic Regulator", *IFAC Proceedings*, Cilt : 47, s: 840-846, 2014.
- [11] Zhou, B., Lin, Z. L., Duan, G. R., " A Lyapunov inequality characterization of and a Riccati inequality approach to  $H_\infty$  and  $L_2$  low gain feedback", *SIAM Journal on Control and Optimization*, Cilt: 50, s:1-22, 2012.
- [12] Ebihara, Y., Hagiwara, T., M. Araki, "Sequential tuning methods of LQ/LQI controllers for multivariable systems and their application to hot strip mills," *Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control*, Cilt: 1, s: 767-772, 2012.