

# Zaman Gecikmeli Kararsız Sistemler İçin Kararlılık Sınır Eğrisine Dayanan PI-PD Kontrolör Tasarım Yöntemlerinin İncelenmesi

## Investigation of PI-PD Controller Design Methods Based on Stability Boundary Locus for Unstable Time Delay Systems

Hilal İrgan<sup>1</sup>, Ramazan Menak<sup>2</sup>, Nusret Tan<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümü  
Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi, Tokat  
hilal.irgan@gop.edu.tr

<sup>2</sup>Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümü  
Siirt Üniversitesi, Siirt  
ramazanmenak@siirt.edu.tr

<sup>3</sup>Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümü  
İnönü Üniversitesi, Malatya  
nusret.tan@inonu.edu.tr

### Özetçe

Bu çalışmada, zaman gecikmeli kararsız sistemler için literatürde bulunan kararlılık sınır eğrisine dayanan analitik kontrolör ayarlama yöntemleri kullanılarak PI-PD kontrolör tasarımı gerçekleştirilmiştir. Bu sistemlerin iç döngüsünde PD kontrolcüsü için kararlılık sınır eğrisi elde edilerek, Ağırlıklı Geometrik Merkez, Konveks Kararlılık Bölgesinin Ağırlık Merkezi ve Kararlılık Üçgeni Yaklaşımı yöntemleriyle kontrolör parametreleri belirlenmiştir. İç döngüde elde edilen yeni transfer fonksiyonu için yine dış döngüde PI kontrolör tasarımı bu üç analitik yöntemle göre yapılmış ve kontrol sisteminin birim basamak cevapları karşılaştırılmıştır. Elde edilen sonuçlar, zaman gecikmeli kararsız sistemlerde bu üç yöntemin etkin bir şekilde uygulanabileceğini göstermektedir. Ayrıca, yöntemlerin yalnızca bazı performans özellikleri açısından birbirlerine üstünlük sağladığı gözlemlenmiştir. Dolayısıyla, yöntemlerden herhangi birisinin her koşulda tüm performans özellikleri bakımından diğerlerinden daha üstün olmadığı tespit edilmiş ve literatüre sunulmuştur.

### Abstract

In this study, PI-PD controller design was carried out for unstable time delay systems using analytical controller tuning methods based on the stability boundary locus found in the literature. By obtaining the stability boundary locus for the PD controller in the inner loop of these systems, the controller parameters were determined by the Weighted Geometric Center, Centroid of the Convex Stability Region, and the Stability Triangle Approach methods. For the new transfer function obtained in the inner loop, the PI controller design in the outer loop was made according to these three methods, and the control system's unit step responses were compared. The results show that these methods can be applied effectively in time-delay unstable systems. In addition, it has been observed that the methods are superior to each other only in terms of some performance characteristics. Therefore, it has been determined that any of the methods is not superior to the others in terms of all performance characteristics under all conditions and has been presented to the literature.

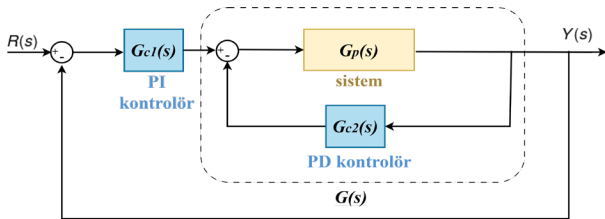
### 1. Giriş

Kontrol teorisindeki önemli gelişmelere rağmen, oransal-integral (PI) ve oransal-integral-türev (PID) kontrolörler, dayanıklı performans ve basit yapıları sebebiyle endüstriyel alanda günümüzde halen daha yaygın bir şekilde kullanılmaktadır [1]. Bunun en önemli sebebi basit bir yapıya sahip olmalarına rağmen birçok kontrol uygulamasında oldukça iyi ve sağlam performans gösterebilmeleridir [2]. Bu avantajlarına rağmen, tek başına bir PI veya PID denetleyicisi, yapısal sınırlaması nedeniyle zaman gecikmeli, kararsız, ters tepkili, integratörlü sistemleri ve kötü yerleştirilmiş karmaşık kutuplara sahip sistemleri kontrol etmek için yeterli değildir ve bu tip sistemlerde zayıf kapalı döngü performansları göstermektedir [2-4]. Öyle ki basit bir PID denetleyicileri ile kararsız birinci dereceden artı zaman gecikmeli sistemlerde bile istenen kapalı çevrim performansı elde edilemez [4]. Bu nedenle, bu tip sistemler için literatürde PI-PD denetleyici yapısı önerilmiştir [5-8]. PI-PD denetleyicisi ile kontrol sistemi için iyileştirilmiş kapalı döngü performansları elde edilebilir [9]. Bu kontrol yapısında iç döngüde bir PD kontrolör kullanmak, açık döngü kararsız bir sistemi açık döngü kararlı bir işleme dönüştürebilir ve rezonans veya integratörlü sistemler için açık döngü kararlı sistem kutuplarının uygun konumlarını sağlayabilir [6]. PD geri beslemesi ile elde edilen uygun kutup yerleşimine sahip iç döngü transfer fonksiyonu daha sonra PI kontrolör tarafından kontrol edilerek istenen kapalı döngü performansı elde edilmeye çalışılır. Ayrıca, PI-PD kontrolörün ayarlanacak dört parametresinin ( $K_f$ ,  $K_d$ ,  $K_p$  ve  $K_i$ ) olması geleneksel PI/PID denetleyicilerine göre daha avantajlı olmasını sağlamaktadır [6, 10, 11]. Ancak bu parametrelerin düzgün seçilmemesi kötü bir kapalı döngü performansına neden olur. Bu nedenle transfer fonksiyonu verilen bir sistem için literatürde bulunan birçok teorik yaklaşım kullanılarak bu kontrolcülerin parametre ayarı yapılabilmektedir ve bu konuda çalışmalar devam etmektedir.

Son zamanlarda literatürde kararlılık sınır bölgesi yöntemine dayanan PID ayarlama çalışmalarının arttığı

görülmektedir [6-9, 12-14]. Bu yöntemler, belirli tür sistemlerinin kontrolüne etkili bir şekilde çözümler sağlamaktadır. [13]'te ( $K_p$ ,  $K_i$ ) parametre düzleminde sistemi kararlı hale getiren PI denetleyicilerinin hesaplanması için kararlılık sınır eğrilerinin (stability boundary locus, SBL) çizilmesine dayanan bir yaklaşım verilmektedir. SBL, kapalı çevrim bir sistemi kararlı yapan tüm denetleyici parametrelerini elde etmek için kullanılan grafiksel bir yöntemdir. Önerilen yöntem aynı zamanda kullanıcı tarafından belirlenen kazanç ve faz paylarını elde edebilecek biçimde PI denetleyicisi tasarımı imkânı da sağlar [9]. [15]'te, Kharitonov teoremi [16] ile birleştirilerek SBL'nin çizilmesine dayanan ve belirsiz parametrelere sahip kontrol sistemleri için PI-PD kontrolörü tasarlamaya dayalı bir yöntem önerilmiştir. PI-PD denetleyicisi üzerine başka bir tasarım çalışması yakın zamanda [17] tarafından yapılmıştır. Burada, zaman gecikmeli sistemlerinin PI kontrolü için ilk olarak [18] tarafından önerilen ağırlıklı geometrik merkez (weighted geometrical center, WGC) yöntemi kullanılarak tamsayı dereceli ve kesir dereceli PI-PD denetleyiciler tasarlanmıştır. [18]'de kullanılan tasarım prosedüründe WGC'yi hesaplamak için SBL'yi oluşturan tüm frekansa bağlı noktaları kullanmak gerekir. Bu da fazla bir hesaplama yükünü beraberinde getirmektedir. Bu dezavantaja çözüm sunmak için [6]'da konveks kararlılık bölgesinin ağırlıklı merkezi (centroid of the convex stability region, CCSR) adlı yeni bir yöntem sunulmuştur. Önerilen yöntem ile kararlı kontrolör parametreleri bölgesini belirleyen SBL'ye ait birkaç özel noktanın koordinatları kullanılarak uygun kontrolör parametreleri analitik olarak elde edilir. WGC yöntemindeki gibi frekansa bağlı tüm noktalar kullanılmadığı için tasarım prosedürünün hesaplama yükü WGC'ye kıyasla çok düşüktür. SBL eğrisine dayanan başka bir analitik yöntem ise [14] tarafından sunulmuştur. Kararlılık Üçgeni Metodu (stability triangle method, STM) olarak adlandırılan bu yöntem, [6]'daki çalışmaya benzer olarak SBL içinde farklı frekans değerlerine karşılık gelen noktalar yardımıyla kararlılık üçgeni oluşturmaya dayanmaktadır. Bu kararlılık üçgeni yöntemi ile kararlı bölge içinde üç nokta belirlenerek kararlı üçgeninin ağırlıklı merkezi analitik olarak hesaplanır.

Bu çalışmada zaman gecikmesine sahip kararsız sistemler için literatürde bulunan SBL'ye dayanan analitik kontrolör ayarlama yöntemleri ile PI-PD kontrolör tasarımı yapılmıştır. PI-PD kontrol yapısında kararsız zaman gecikmeli sistemlerin önce iç döngüde PD kontrolcüsü için SBL'si elde edilerek sırasıyla WGC, CCSR ve STM yöntemlerine göre ( $K_f$ ,  $K_d$ ) parametreleri elde edilmiştir. Buna göre iç döngüde elde edilen yeni transfer fonksiyonları için PI kontrolör parametreleri ( $K_p$ ,  $K_i$ ) yine SBL'ye dayanan bu üç analitik yöntemle tasarlanarak kapalı döngü cevapları kıyaslanmıştır. Elde edilen sonuçların literatüre katkısı, bu üç yöntemin zaman gecikmeli kararsız sistemlerdeki verimliliğini göstererek yöntemleri kıyaslamak ve STM yönteminin PI-PD kontrol yapısındaki etkinliğini göstermektedir.



Şekil 1: PI-PD kontrolör ile tasarlanan kapalı çevrim kontrol sisteminin blok diyagramı.

## 2. PI-PD Kontrol Yapısı için SBL Grafiklerinin Çıkarılması

Bu bölümde, Şekil 1'de verilen PI-PD kontrolörlü kapalı çevrim kontrol sisteminin SBL denklemleri sunulmuştur. Burada,  $G_p(s)$  zaman gecikmeli kararsız sistemi,  $G_{c1}(s)$  PI kontrolörü ve  $G_{c2}(s)$  ise PD kontrolörü tanımlamakta olup sırasıyla Eşitlik (1) ve (2)'de verilmektedir.

$$G_p(s) = \frac{N_p(s)}{D_p(s)} e^{-\theta s} \quad (1)$$

$$G_{c1}(s) = K_p + \frac{K_i}{s}, \quad G_{c2}(s) = K_f + K_d s \quad (2)$$

Eşitlik (1)'de  $N_p$  ve  $D_p$  sırasıyla  $G_p$ 'nin pay ve payda polinomlarını ifade etmektedir. Burada esas amaç kapalı çevrim sistemi kararlı yapan PI ve PD kontrolör parametrelerinin elde edilmesidir. Bunun için SBL analizi [6-8, 15]'teki çalışmalar dikkate alınarak yapılmıştır.

### 2.1. PD Kontrol Yapısı için SBL Denklemlerinin Elde Edilmesi

Şekil 1'de PD kontrolörlü iç döngü için karakteristik denklem Eşitlik (3)'teki gibi yazılabilir:

$$\Delta_{PD}(s) = D_p(s) + (K_f + K_d s)N_p(s)e^{-\theta s} \quad (3)$$

SBL, kontrolör parametrelerine ve 0'dan sonsuza kadar değişebilen frekansa ( $\omega$ ) bağlı olduğundan, sistemi kararlı yapan frekans aralığını ve dolayısıyla sistemi kararlı yapan kontrolör parametreleri kümesini elde etmek için aşağıdaki denklemler kullanılır.

Eşitlik (1)'de  $s=j\omega$  yazarak,  $G_p(j\omega)$  Eşitlik (4)'teki ve  $\Delta_{PD}(j\omega)$  Eşitlik (5)'teki gibi elde edilir:

$$G_p(j\omega) = \frac{N_{pe}(-\omega^2) + j\omega N_{po}(-\omega^2)}{D_{pe}(-\omega^2) + j\omega D_{po}(-\omega^2)} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{PD}(j\omega) = & [D_{pe} + (K_f N_{pe} - K_d \omega^2 N_{po}) \cos(\omega\theta) \\ & + (K_f \omega N_{po} + K_d \omega N_{pe}) \sin(\omega\theta)] \\ & + j[\omega D_{po} (K_f \omega N_{po} + K_d \omega N_{pe}) \cos(\omega\theta) \\ & + (-K_f N_{pe} + K_d \omega^2 N_{po}) \sin(\omega\theta)] \end{aligned} \quad (5)$$

Eşitlik (5)'teki karakteristik denklemin gerçek ve sanal kısımları sıfıra eşitlenerek  $K_f(\omega)$  ve  $K_d(\omega)$  denklemleri sırasıyla Eşitlik (6)-(7)'deki gibi elde edilir.

$$K_f(\omega) = \frac{(\omega^2 D_{po} N_{po} + D_{pe} N_{pe}) \cos(\omega\theta) - \omega (D_{po} N_{pe} - D_{pe} N_{po}) \sin(\omega\theta)}{-(\omega^2 N_{po}^2 + N_{pe}^2)} \quad (6)$$

$$K_d(\omega) = \frac{-(\omega D_{pe} N_{po} - \omega D_{po} N_{pe}) \cos(\omega\theta) + (D_{pe} N_{pe} + \omega^2 D_{po} N_{po}) \sin(\omega\theta)}{-\omega (\omega^2 N_{po}^2 + N_{pe}^2)} \quad (7)$$

Eşitlik (6)-(7) yardımıyla ( $K_d, K_f$ ) düzleminde SBL grafiği  $l(K_d, K_f, \omega)$ , Şekil 2'deki gibi çizdirilebilir. Ancak burada dikkat edilmesi gereken bir husus vardır; belirli bir frekans değerinde Eşitlik (6) ve (7)'nin paydası 0'a eşitse, bu frekans değeri kullanılmamalıdır. Bu durumda süresiz bir SBL elde edilecek ve bu, sistemi kararlı yapan kontrolör değerlerinin hesaplanmasında bir engel oluşturmayacaktır. SBL elde edildikten sonra, (varsa) gerçek kök ve sonsuz kök sınır çizgileri parametre düzlemini kararlı ve kararsız bölgelere ayırabileceğinden, sistemi kararlı yapan kontrolör parametrelerinin var olup olmadığını test etmek gerekir. Eşitlik (6)'da  $\omega=0$ 'ı yerine koyarak ve denklemleri sıfıra eşitleyerek elde edilen gerçek kök sınır çizgisi ( $K_f=K_f(0)$ ) bulunmalıdır, çünkü Eşitlik (3)'teki  $\Delta_{PD}(s)$ 'in gerçek bir kökü  $s=0$ 'da sanal eksen üzerinden geçebilir.  $\omega=0$  için Eşitlik (5)'de verilen  $\Delta_{PD}(j\omega)$ 'nın sanal kısmının sıfır olduğu görülmektedir.  $\omega=0$  için Eşitlik (5)'in gerçek kısmının da sıfıra eşit olması için  $K_f=K_f(0)$  olması gerekir. Bu nedenle,  $K_f=K_f(0)$  çizgisi, kararlılık bölgesinin sınır çizgisidir. Genel olarak, uygun bir transfer fonksiyonu için  $D_p$ 'nin derecesi  $N_p$ 'den büyüktür. Bu nedenle, sonsuz kök sınır çizgisi olmayacaktır [15].

SBL'nin, 0 ile sonsuz arasında değişen frekansa ( $\omega$ ), bağlı olduğu görülebilir. Yukarıda da belirtildiği gibi  $K_f=K_f(0)$  çizgisi kararlılık sınır eğrisinin sınırlayıcısı olduğundan  $\omega$ 'nın pozitif reel değerinin altındaki frekansın  $K_f(\omega)=K_f(0)$ 'ı sağladığı düşünülebilir ve frekansın bu pozitif reel değeri  $\omega_{max}$  olarak adlandırılırsa SBL'nin  $\omega \in [0, \omega_{max}]$  aralığında çizilmesi kararlılığı sağlayan ( $K_d, K_f$ ) parametrelerinin elde edilmesi için yeterli olacaktır [15].

## 2.2. PI Kontrol Yapısı için SBL Denklemlerinin Elde Edilmesi

Şekil 1'de verilen blok diyagramında PD kontrolörlü iç döngünün kapalı çevrim transfer fonksiyonu  $G(s)$ , Eşitlik (8)'deki gibi ifade edilir.

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{G_p(s)}{1 + G_{c2}(s)G_p(s)} = \frac{N_p(s)e^{-\theta s}}{D_p(s) + (K_f + K_d s)N_p(s)e^{-\theta s}} \quad (8)$$

$s=j\omega$  olarak alındığında  $G(s)$  aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$G(s) = \frac{N_e + j\omega N_o}{D_e + j\omega D_o} = \frac{(N_{pe} + j\omega N_{po})(\cos(\omega\theta) - j\sin(\omega\theta))}{\Delta_{PD}(j\omega)} \quad (9)$$

burada,

$$\begin{aligned} N_e &= N_{pe} \cos(\omega\theta) + \omega N_{po} \sin(\omega\theta) \\ N_o &= N_{po} \cos(\omega\theta) - \frac{N_{pe}}{\omega} \sin(\omega\theta) \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} D_e &= D_{pe} + (K_f N_{pe} - K_d \omega^2 N_{po}) \cos(\omega\theta) \\ &\quad + (K_f \omega N_{po} + K_d \omega N_{pe}) \sin(\omega\theta) \\ D_o &= D_{po} (K_f N_{po} + K_d N_{pe}) \cos(\omega\theta) \\ &\quad + \left( -\frac{K_f N_{pe}}{\omega} + K_d \omega N_{po} \right) \sin(\omega\theta) \end{aligned} \quad (11)$$

PI parametrelerini elde etmek için kullanılan yöntem Bölüm 2.1'dekinin aynısı olup denklemler aşağıdaki gibi elde edilir:

Dış döngü kapalı çevrim karakteristik denklemi Eşitlik (12)'deki gibi yazılır:

$$\Delta_{PI}(j\omega) = [k_i N_e(-\omega^2) - k_p \omega^2 N_o(-\omega^2) - \omega^2 D_o(-\omega^2)] + j [k_p \omega N_e(-\omega^2) + k_i \omega N_o(-\omega^2) + \omega D_e(-\omega^2)] \quad (12)$$

Karakteristik denklemin gerçek ve sanal kısımları sıfıra eşitlenerek  $K_p(\omega)$  ve  $K_i(\omega)$  denklemleri sırasıyla Eşitlik (13)-(14)'teki gibi elde edilir.

$$K_p(\omega) = \frac{\omega^2 D_o(-\omega^2) N_o(-\omega^2) + D_e(-\omega^2) N_e(-\omega^2)}{-(\omega^2 N_o^2(-\omega^2) + N_e^2(-\omega^2))} \quad (13)$$

$$K_i(\omega) = \frac{\omega^2 D_e(-\omega^2) N_o(-\omega^2) - \omega^2 D_o(-\omega^2) N_e(-\omega^2)}{-(\omega^2 N_o^2(-\omega^2) + N_e^2(-\omega^2))} \quad (14)$$

Eşitlik (13) ve (14) çözülerek ( $K_p, K_i$ ) düzleminde SBL,  $l(K_p, K_i, \omega)$ , Şekil 2'deki gibi elde edilir. SBL,  $l(K_p, K_i, \omega)$ , ve  $K_i=K_i(0)=0$  doğrusu parametre düzlemini ( $K_p-K_i$  düzlemi) kararlı ve kararsız bölgelere ayırır [9]. Çünkü  $\Delta_{PI}(s)$ 'in gerçek kökü sanal eksen  $s=0$ 'da geçebilir, dolayısıyla  $\omega=0, I_d=0$  ve  $R_d=0$  için,  $K_i=0$  bulunabilir [15].

## 2.3. Ağırlıklı Geometrik Merkez Metodunun Uygulanması

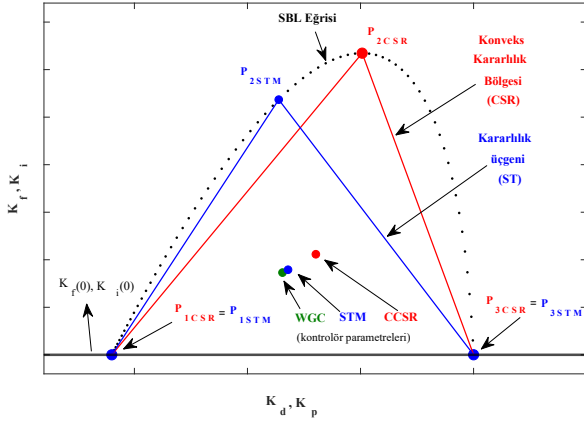
Şekil 2'de PD kontrol yapısı için elde edilen SBL grafiği sunulmuştur. Bu eğri, Bölüm 2.1'de anlatıldığı gibi  $K_f(\omega)=K_f(0)$ 'ı sağlayan  $\omega_{max}$  değerine karşılık  $\omega \in [0, \omega_{max}]$  aralığında her bir  $\omega$  değeri için  $K_d(\omega)-K_f(\omega)$  denklemlerinin çözülerek ( $K_d, K_f$ ) düzleminde çizdirilmesi ile elde edilmiştir. Bu kararlılık bölgesi  $n$  adet ( $K_d, K_f$ ) koordinat noktasından ( $K_{d1}, K_{f1}$ ), ( $K_{d2}, K_{f2}$ ),..., ( $K_{dn}, K_{fn}$ ) oluşmaktadır.  $K_f(0)$  çizgisi,  $\omega$ 'dan bağımsız olup SBL'nin sınırını oluşturduğundan Şekil 2'de gösterildiği gibi her ( $K_{d1}, K_{f1}$ ), ( $K_{d2}, K_{f2}$ ),..., ( $K_{dn}, K_{fn}$ ) çifti,  $K_f(0)$  çizgisi için sırasıyla ( $K_{d1}, K_f(0)$ ), ( $K_{d2}, K_f(0)$ ),..., ( $K_{dn}, K_f(0)$ )'a karşılık gelir. Burada elde edilen  $n$  adet sonuç  $\omega$ 'nın adım aralığı ( $\Delta\omega$ ) ile ilgilidir. Adım aralığının artması örnek sayısını artıracığından kontrolör hesaplama yöntemlerinden elde edilecek sonucun daha doğru olmasını sağlayacaktır.

[18] tarafından tanıtılan WGC yöntemi, kontrolör parametreleri için SBL üzerindeki  $\omega$ 'ya bağlı olarak elde edilen tüm koordinat noktaları yardımıyla kararlılık bölgesi içerisindeki uygun çalışma noktasının bulunmasını sağlamaktadır. Buna göre Şekil 2'deki SBL grafiği için Eşitlik (15)'teki PD kontrolör değerleri elde edilir:

$$K_{d_{wgc}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_{d_i}, \quad K_{f_{wgc}} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n (K_{f_i} + K_f(0)) \quad (15)$$

PI kontrolcü için SBL eğrisi, Şekil 2'deki gibi PD'dekine benzer şekilde  $K_i(\omega)=K_i(0)=0$ 'ı sağlayan  $\omega_{max}$  değerine karşılık  $\omega \in [0, \omega_{max}]$  aralığında her bir  $\omega$  değeri için  $K_p(\omega)-K_i(\omega)$  denklemlerinin çözülerek ( $K_p, K_i$ ) düzleminde çizdirilmesi ile elde edilmiştir. Buna göre PI kontrolör değerleri Eşitlik (16)'daki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} K_{p_{wgc}} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_{p_i} \\ K_{i_{wgc}} &= \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n (K_{i_i} + K_i(0)) = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n K_{i_i} \end{aligned} \quad (16)$$



Şekil 2: SBL grafiği ve WGC-CSR-STM'nin uygulanması.

#### 2.4. Konveks Kararlılık Bölgesi Metodunun Uygulanması

[6]'da tanıtilen yöntem SBL grafiği yardımıyla hesaplanan analitik bir yöntem olup CCSR olarak adlandırılmıştır. Yönteme göre Şekil 2'deki gibi SBL üzerindeki tepe ve köşe noktalarının birleşimi ile elde edilen kararlı alan CSR'yi tanımlamaktadır.

PD kontrolör için elde edilmiş  $(K_d, K_f)$  düzlemindeki SBL grafiğinin tepe ve köşe noktalarının koordinatları  $P_1(K_d(0), K_f(0))$ ,  $P_2(K_d(\omega_c), K_f(\omega_c))$  ve  $P_3(K_d(\omega_{max}), K_f(\omega_{max}))$  olarak ifade edilir. Burada  $P_1$ ,  $\omega=0$ 'a karşılık gelen köşe noktayı ifade eder.  $K_{fmax}$ 'ın elde edildiği frekans noktası  $K_f(\omega_c)=K_{fmax}$  ise bu frekansa karşılık gelen  $K_d$  değeri de  $K_d(\omega_c)$  olarak hesaplanır ve bu nokta  $P_2$  köşesini ifade eder.  $P_3$  ise, SBL eğrisinin  $\omega=\omega_{max}$ 'a karşılık geldiği köşe noktayı ifade eder. Buna göre PD kontrolör parametreleri  $P_1$ ,  $P_2$  ve  $P_3$  noktaları yardımıyla Eşitlik (17)'deki gibi hesaplanır:

$$K_{d_{CSR}} = \frac{K_d(0) + K_d(\omega_c) + K_d(\omega_{max})}{3}$$

$$K_{f_{CSR}} = \frac{K_f(0) + K_f(\omega_c) + K_f(\omega_{max})}{3}$$
(17)

PI kontrolör için  $P_1$ ,  $P_2$  ve  $P_3$  noktaları bulunarak kontrolör parametreleri Eşitlik (18)'deki gibi hesaplanır:

$$K_{p_{CSR}} = \frac{K_p(0) + K_p(\omega_c) + K_p(\omega_{max})}{3}$$

$$K_{i_{CSR}} = \frac{K_i(0) + K_i(\omega_c) + K_i(\omega_{max})}{3}$$
(18)

#### 2.5. Kararlılık Üçgeni Metodunun Uygulanması

[6]'da tanıtilen yönteme benzer olarak [14] tarafından STM olarak adlandırılan yeni bir analitik kontrolör tasarım formülleri verilmiştir. Yöntem, Şekil 2'de gösterildiği gibi WGC ve CSR yöntemleri gibi SBL'ye dayanan bir yöntem olup, Yüce (2023) tarafından [14]'te PI kontrolü sunulmuştur. Yöntem, ilk defa bu çalışmada PI-PD kontrol için uygulanmış olup kontrolör formülleri Eşitlik (19)-(20)'de elde edilmiştir. STM'de, CSR'den farklı olarak  $P_2$  noktası  $\omega=\omega_{max}/2$ 'ye karşılık gelen köşe nokta olarak ifade edilir, yani  $P_2(K_d(\omega_{max}/2), K_f(\omega_{max}/2))$  olup PD kontrolör parametreleri  $P_1$ ,  $P_2$  ve  $P_3$  noktaları yardımıyla Eşitlik (19)'daki gibi hesaplanır:

$$K_{d_{STM}} = \frac{K_d(0) + K_d(\omega_{max}/2) + K_d(\omega_{max})}{3}$$

$$K_{f_{STM}} = \frac{K_f(0) + K_f(\omega_{max}/2) + K_f(\omega_{max})}{3}$$
(19)

PI kontrolör için  $P_1$ ,  $P_2$  ve  $P_3$  noktaları bulunarak kontrolör parametreleri Eşitlik (20)'deki gibi hesaplanır:

$$K_{p_{STM}} = \frac{K_p(0) + K_p(\omega_{max}/2) + K_p(\omega_{max})}{3}$$

$$K_{i_{STM}} = \frac{K_i(0) + K_i(\omega_{max}/2) + K_i(\omega_{max})}{3}$$
(20)

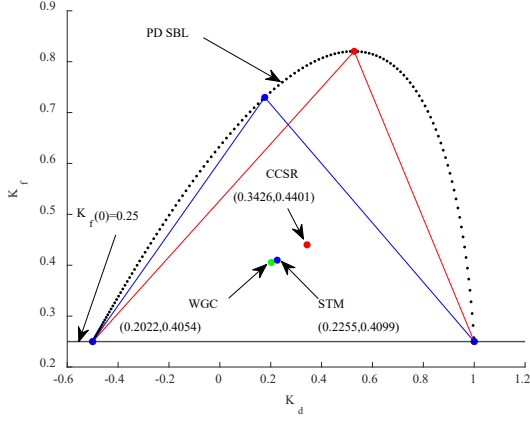
### 3. Örnekler

**Örnek 1:** Bu örnekte Eşitlik (21)'de görüldüğü gibi birinci dereceden zaman gecikmeli kararsız bir sistem [6, 15] için Bölüm 2'de verilen yöntemler kullanılarak PI-PD kontrolör tasarımı yapılmıştır.

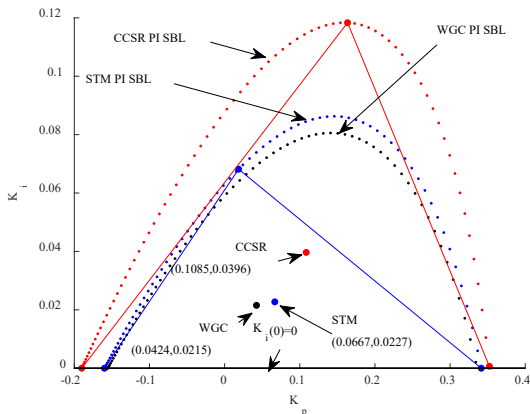
$$G_p(s) = \frac{4}{4s-1} e^{-2s}$$
(21)

Önce, iç döngüde PD yapısı için  $K_d-K_f$ 'ye bağlı SBL çizilmiştir. Daha sonra kararlılık bölgesinde WGC, CCSR ve STM noktaları bulunmuştur. Burada Eşitlik (6) kullanılarak  $K_f(0)=0.25$  olarak bulunmuştur. Eşitlik (6)'yı 0.25 yapan pozitif frekans değeri  $\omega_{max}=1.3932$  bulunmuştur. Dolayısıyla  $K_d-K_f$ 'ye bağlı SBL  $\omega=[0:0.01:1.3932]$  aralığında Şekil 3'teki gibi çizilmiştir. Şekil 3'te PD iç döngüsü için her bir yöntemden elde edilen  $K_d-K_f$  kontrolör parametre çifti, dış döngüde PI hesaplanması için sırasıyla kullanılmıştır. Bu durumda her bir  $K_d-K_f$  çifti kullanılarak dış döngüde  $K_p-K_i$  SBL'lerini çizmek için Eşitlik (14)'ü 0 yapan kritik frekans değeri belirlenmelidir. Bu örnek için WGC, STM ve CCSR noktalarındaki  $K_d-K_f$  çiftleri kullanılarak her bir yöntem için kritik frekans değerleri ( $\omega_{max}$ ) sırasıyla 0.7127 rad/sn, 0.7273 rad/sn ve 0.8 rad/sn bulunmuştur. Sonuç olarak bu  $\omega_{max}$  değerleri için  $\omega=[0:0.01:\omega_{max}]$  kullanılarak Şekil 4'te her bir yöntem için  $K_p-K_i$  SBL'ler çizdirilmiştir. PD'de olduğu gibi, PI için de her bir yönteme ait SBL'nin altında WGC, STM ve CCSR noktaları bulunmuştur. Her bir yöntem kullanılarak elde edilen  $K_f, K_d, K_p, K_i$  değerleri ile Şekil 1'deki yapı kullanılarak kapalı çevrim transfer fonksiyonları elde edilmiş ve birim basamak tepkileri incelenmiştir. Şekil 5'te her bir yöntem kullanılarak elde edilen  $K_f, K_d, K_p, K_i$  değerlerine göre elde edilen birim basamak cevapları verilmiştir.

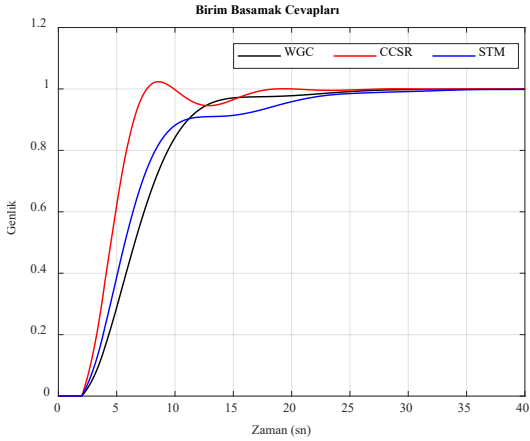
Birim basamak yanıtları incelendiğinde, CCSR yöntemi kullanılarak kontrolör parametrelerinin bulunduğu sistemin yerleşme süresi ( $t_s$ ) 16.019 saniye iken WGC ve STM için sırasıyla 20.775 ve 22.829 saniyedir. Buna karşın CCSR yönteminde yüzde aşım ( $\%M_p$ ) %2.3587 iken WGC ve STM için aşımız bir sistem elde edilmiştir. Yükselme süreleri ( $t_r$ ) incelendiğinde, CCSR için 3.7347 saniye iken WGC ve STM için sırasıyla 7.6656 ve 7.7176 saniye olarak elde edilmiştir. Dolayısıyla her bir yöntemin sistem performansı açısından birbirleri üzerinde belirli bir avantaj ve dezavantajı olduğu görülmektedir. PI-PD kontrol yapısı için kullanılan bu yöntemlerden herhangi birisinin kesin bir şekilde diğeri üzerinde sistem performansı açısından bir üstünlüğü olmadığı gözükmemektedir. Sadece belirli bir performans özelliği bakımından kendi aralarında avantaj ve dezavantajları olduğu tespit edilmiştir.



Şekil 3: Örnek 1 PD kontrolü için SBL grafiği ve WGC-CSR-STM'nin uygulanması.



Şekil 4: Örnek 1 PI kontrolü için her yöntemde elde edilen SBL'ler ve WGC-CSR-STM'nin uygulanması.



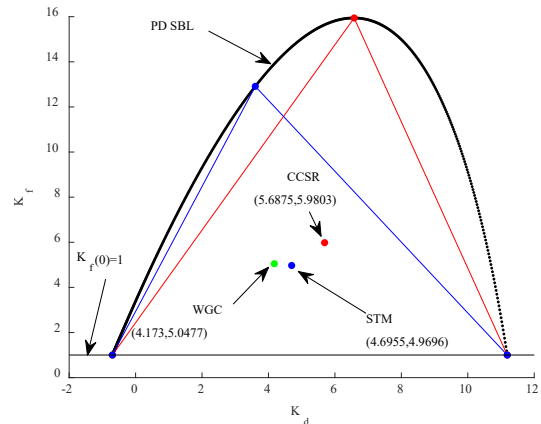
Şekil 5: Her bir yöntemle elde edilen  $K_f$ ,  $K_d$ ,  $K_p$ ,  $K_i$  değerlerine göre sistemin birim basamak cevapları.

**Örnek 2:** Bu örnekte Eşitlik (22)'de görüldüğü gibi ikinci dereceden zaman gecikmeli kararsız bir sistem [6, 19] için yine verilen yöntemler kullanılarak PI-PD kontrolör tasarımı yapılmıştır.

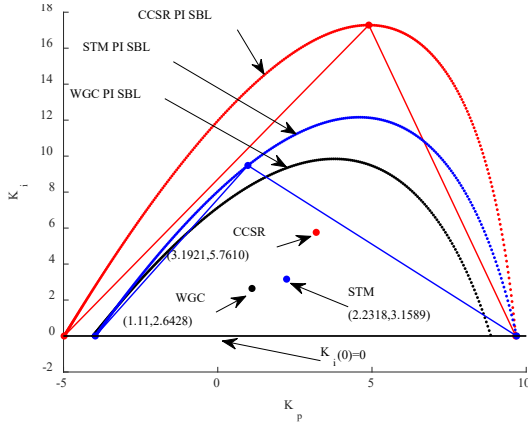
$$G_p(s) = \frac{1}{2s^2 + s - 1} e^{-0.3s} \quad (22)$$

İç döngüde PD yapısının SBL'sini elde edebilmek için Eşitlik (6) kullanılarak  $K_f(0)=1$  bulunmuştur. Yine Eşitlik (6)'yı 1'e eşitleyen pozitif frekans değeri  $\omega_{max}=5.48$  rad/sn olarak bulunmuştur. Dolayısıyla  $K_d-K_f$ 'ye bağlı SBL  $\omega=[0:0.01:5.48]$  aralığında çizilmiştir. Elde edilen sonuçlar Şekil 6'da verilmiştir. Şekil 6'da PD iç döngüsü için her bir yöntemden elde edilen  $K_d-K_f$  kontrolör parametreleri çiftleri de verilmiştir. Burada her bir yöntemden elde edilen  $K_d-K_f$  çiftleri Eşitlik (8)'de yerine yazılarak dış döngüde PI parametrelerinin hesaplanması için kullanılmıştır. Her bir yöntemden alınan  $K_d-K_f$  çifti kullanıldığında Eşitlik (14)'ü sıfır yapacak farklı kritik frekans değerleri ( $\omega_{max}$ ) oluşmaktadır. Bu değerler WGC, STM ve CCSR için sırasıyla 2.9423 rad/sn, 3.1221 rad/sn ve 3.4552 rad/sn olarak hesaplanmıştır. Sonuç olarak bu  $\omega_{max}$  değerleri için  $\omega=[0:0.01:\omega_{max}]$  kullanılarak her bir yöntem için  $K_p-K_i$  SBL'leri Şekil 7'deki gibi çizdirilmiştir. Buradaki her bir  $K_p-K_i$  çiftine göre çizdirilen SBL, PD tarafından  $K_d-K_f$  çifti hangi yöntem ile elde edilmişse yine PI tarafında da aynı yöntem kullanılarak elde edilmiştir. Sonuç olarak her bir yöntem kullanılarak elde edilen  $K_f$ ,  $K_d$ ,  $K_p$ ,  $K_i$  değerleri Şekil 1'deki yapı kullanılarak kapalı çevrim transfer fonksiyonları elde edilmiş ve sistemlerin birim basamak tepkileri incelenmiştir. Şekil 8'de her bir yöntem kullanılarak elde edilen  $K_f$ ,  $K_d$ ,  $K_p$ ,  $K_i$  değerlerine göre elde edilen birim basamak cevapları verilmiştir.

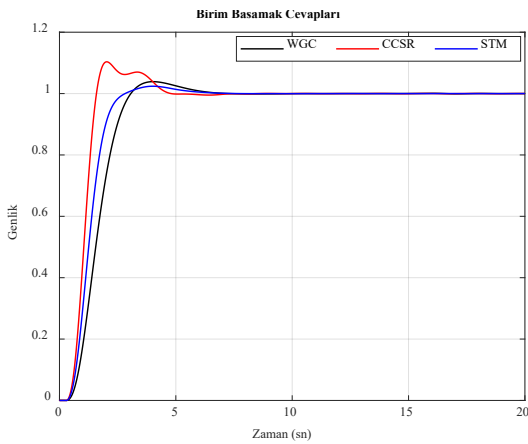
Birim basamak yanıtları incelediğinde, CCSR yöntemi kullanılarak kontrolör parametrelerinin bulunduğu sistemin yerleşme süresi 4.2687 saniye iken WGC ve STM için sırasıyla 5.2752 ve 4.5411 saniyedir. Dolayısıyla yerleşme süresi bakımından CCSR daha iyi performans göstermiştir. Buna karşın CCSR yönteminde yüzde aşım %10.342 iken WGC ve STM için sırasıyla %3.8837 ve %2.3844 olarak elde edilmiştir. Yükselme süreleri incelendiğinde, CCSR için 0.80743 saniye iken WGC ve STM için sırasıyla 1.6592 ve 1.2858 saniye olarak elde edilmiştir. Dolayısıyla, birinci dereceden kararsız bir sistemdekine benzer olarak ikinci dereceden bir sistem için de her bir yöntemin sistem performansı açısından belirli bir avantaj ve dezavantajı olduğu görülmektedir. Sistem derecesi ve yapısı değiştiğinde PI-PD için kullanılan bu yöntemlerden herhangi birisi kesin bir şekilde diğerinde sistem performansı açısından bir üstünlüğü olmadığı gözükmemektedir. Sadece belirli bir performans özelliği bağlamında kendi aralarında avantaj ve dezavantajları olduğu tespit edilmiştir.



Şekil 6: Örnek 2 PD kontrolü için SBL grafiği ve WGC-CSR-STM'nin uygulanması.



Şekil 7: Örnek 2 PI kontrolü için her yöntemde elde edilen SBL'ler ve WGC-CSR-STM'nin uygulanması.



Şekil 8: Her bir yöntemle elde edilen  $K_f$ ,  $K_d$ ,  $K_p$ ,  $K_i$  değerlerine göre sistemin birim basamak cevapları.

#### 4. Sonuçlar

Bu çalışmada, zaman gecikmeli kararsız sistemler için literatürde bulunan SBL'ye dayanan analitik kontrolör ayarlama yöntemlerinden olan WGC, CCSR ve STM kullanılarak PI-PD kontrolör tasarımları yapılmıştır. Bu yöntemlerden biri olan STM, ilk defa bu çalışmada PI-PD kontrolör tasarımı için kullanılmıştır. Birinci ve ikinci dereceden zaman gecikmeli kararsız iki tane örnek üzerinden tüm yöntemler ayrı ayrı kullanılarak PI-PD yapısı için  $K_f$ ,  $K_d$ ,  $K_p$ ,  $K_i$  değerleri bulunmuş ve birim basamak cevapları karşılaştırılmıştır. Elde edilen sonuçlar, zaman gecikmeli kararsız sistemlerde WGC, CCSR ve STM analitik kontrolör ayarlama yöntemlerinin etkin bir şekilde uygulanabileceğini göstermiştir. Analizler sonucunda, her yöntemde elde edilen birim basamak cevaplarının belirli bir performans özelliği bakımından birbirlerine göre avantajlı ve dezavantajlı durumları olduğu tespit edilmiştir. Ancak, PI-PD tasarımı için bir yöntemin diğerlerinden bütün performans özellikleri açısından kesin bir şekilde üstün olmadığı gözlemlenmiştir.

#### Kaynakça

[1] K. J. Åström and T. Hägglund, "New tuning methods for PID controllers," in *European Control Conference, 1995*, 1995.

- [2] I. Kaya, "I-PD controller design for integrating time delay processes based on optimum analytical formulas," *IFAC-PapersOnLine*, vol. 51, no. 4, pp. 575-580, 2018.
- [3] I. Kaya, N. Tan, and D. P. Atherton, "A refinement procedure for PID controllers," *Electrical Engineering*, vol. 88, pp. 215-221, 2006.
- [4] S. Uma and A. S. Rao, "Enhanced modified Smith predictor for second-order non-minimum phase unstable processes," *International Journal of Systems Science*, vol. 47, no. 4, pp. 966-981, 2016.
- [5] I. Kaya, "PI-PD controllers for controlling stable processes with inverse response and dead time," *Electrical Engineering*, vol. 98, pp. 55-65, 2016.
- [6] C. Onat, "A new design method for PI-PD control of unstable processes with dead time," *ISA transactions*, vol. 84, pp. 69-81, 2019.
- [7] M. M. Ozyetkin, C. Onat, and N. Tan, "PI - PD controller design for time delay systems via the weighted geometrical center method," *Asian Journal of Control*, vol. 22, no. 5, pp. 1811-1826, 2020.
- [8] M. M. ÖZYETKİN and A. TOPRAK, "Ağırlıklı geometrik merkez metodu ile pratik PI-PD kontrolör tasarımı," *Dicle Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Mühendislik Dergisi*, vol. 7, no. 3, pp. 595-605, 2016.
- [9] N. Tan, I. Kaya, C. Yeroğlu, and D. P. Atherton, "Computation of stabilizing PI and PID controllers using the stability boundary locus," *Energy Conversion and management*, vol. 47, no. 18-19, pp. 3045-3058, 2006.
- [10] D. Atherton and S. Majhi, "Tuning of optimum PIPD controllers," *Proc. Control*, vol. 98, 1998.
- [11] D. P. Atherton and S. Majhi, "Limitations of PID controllers," in *Proceedings of the 1999 American Control Conference (Cat. No. 99CH36251)*, 1999, vol. 6, pp. 3843-3847: IEEE.
- [12] M. Ozyetkin, C. Onat, and N. Tan, "PID tuning method for integrating processes having time delay and inverse response," *IFAC-PapersOnLine*, vol. 51, no. 4, pp. 274-279, 2018.
- [13] N. Tan, "Computation of stabilizing PI and PID controllers for processes with time delay," *ISA Transactions-Instrument Society of America*, vol. 44, no. 2, pp. 213-224, 2005.
- [14] A. Yuce, "Analytical Design of PI Controller for First Order Transfer Function plus Time Delay: Stability Triangle Approach," *IEEE Access*, 2023.
- [15] N. Tan, "Computation of stabilizing PI-PD controllers," *International Journal of Control, Automation and Systems*, vol. 7, pp. 175-184, 2009.
- [16] V. Kharitonov, "Asymptotic stability of an equilibrium position of a family of systems of linear differential equations," *Differentsial'nye Uravneniya*, vol. 14, pp. 1483-1485, 1978.
- [17] M. M. Ozyetkin, "A simple tuning method of fractional order PI $\lambda$ -PD $\mu$  controllers for time delay systems," *ISA transactions*, vol. 74, pp. 77-87, 2018.
- [18] C. Onat, "A new concept on PI design for time delay systems: weighted geometrical center," *International Journal of Innovative Computing, information and control*, vol. 9, no. 4, pp. 1539-1556, 2013.
- [19] I. Kaya and D. P. Atherton, "Simple analytical rules for PI-PD controllers to tune integrating and unstable processes," in *International Control Conference, Glasgow, Scotland, 2006*.