Yörüngede Doğrusallaştırılmış Kontrol Yönteminin Füzeye Uygulanması ve Klasik Lineer Kontrol Yöntemleri ile Kıyaslanması
Application of Trajectory Linearization Controller on Missile and Comparison with Classical Control Methods

Emre Keleş[1], *Fikret Çalışkan*[2]

[1]Güdüm Kontrol Birimi,
TÜBİTAK SAGE, Ankara
{emre.keles}@tubitak.gov.tr

[2]Kontrol ve Otomasyon Mühendisliği Bölümü
İstanbul Teknik Üniversitesi, İstanbul
{caliskanf}@itu.edu.tr

Özetçe

Bu çalışmada yatarak dönme(YD) kabiliyetine sahip bir füze modelinin lineer kontrol yöntemleri ile yörüngede doğrusallaştırılmış kontrol(YDK) metodunun kıyaslaması yapılır. Temel olarak 3 bölümden oluşan bildiride birinci kısımda düz dünya modeli kullanılarak modellenmiş füzenin çalışma uzayında geçerli denge noktaları için zamanla değişmeyen kazançlar elde edilip ilgili kazançların tablolanması yapılır. Oransal güdüm kuralına uygun olarak polar koordinat düzleminde dikey, yatay ivme ve yuvarlanma açı kontrolü dışında itkili bir füze olduğu için eksenel ivme kontrolü de yapılır. İç döngülerinde ise yunuslama, yalpalama ve yuvarlanma açısal hızları lineer kuadratik regülatör(LKR) ile tam durumlu geri beslemeli(TDGB) bir şekilde kontrol edilir. Eksenel ivmenin iç döngüsünde ise Mach otopilotu yer alır. İkinci kısımda ise YDK yönteminin yine oransal güdüm kuralına uygun olacak şekilde füzeye nasıl uygulandığı anlatılır. Bu yönteme ait zamanla değişen lineer(ZDL) kazançların karakteristiğini belirleyen özdeğer atamaları yapılır. Son kısımda ise bu iki kontrol yönteminin, Simulink ortamında oluşturulmuş tamamiyle lineer olmayan modeller üzerinde, farklı koşullar altında performans ve gürbüzlük kıyaslaması yapılır.

Abstract

In this study, a comparison of the linear control methods and the trajectory linearization controller(TLC) method is made on bank-to-turn(BTT) missile model. In the paper, which basically consists of 3 parts, in the first part, time-invariant gains are obtained for the valid trim points in the flight envelope of the missile, which is modeled using the flat earth model, and the relevant gains are tabulated. In accordance with the proportional guidance law, axial acceleration control is also performed, since it is a propelled missile apart from vertical, lateral acceleration and roll angle control in the polar coordinate plane. In the inner loops, pitch rate, yaw rate and roll rate are controlled by a linear quadratic regulator(LQR) with full state feedback. In the inner loop of the axial acceleration, Mach autopilot takes place. In the second part, it is explained how the TLC method is applied to the missile in accordance with the proportional guidance law. Eigenvalue assignments are made to determine the characteristics of the time-varying linear(LTV) gains of this method. In the last part, performance and robustness comparisons of these two control methods are made on completely non-linear models created in Simulink environment under different conditions.

1. Giriş

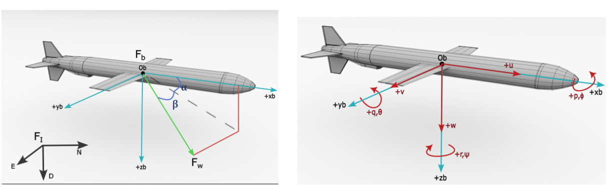
Füzeler, amaçları doğrultusunda farklı güdüm/kontrol yöntemleri kullanılarak yönlendirilmeye çalışılırlar. Lineer kontrol yöntemlerinin kolaylığı ve literatürde çokça çalışmanın yapılmış olması genellikle bu kontrol yöntemlerinin tercih edilmesine sebep olur. Fakat lineer olmayan dünyada bu yöntemleri kullanmak bir takım zorlukları beraberinde getirmektedir. Uçuş zarfında belirlenen denge noktalarında dinamiğin doğrusallaştırılması, seçilen her bir otopilot için kazanç hesaplanması ve depolanıp çevrim içi interpolasyon ile kullanılması gerekir. Füze eğer birden fazla uçuş moduna da sahipse, bu çalışma çok uzun zamanlar alabilmektedir. Ayrıca doğrusallaştırılırken bir takım çapraz etkiler ihmal edilir.

Bütün bu bahsedilen maliyetleri minimize edebilmek için temeli lineer olmayan kontrol yöntemlerini araştırmak gerekebilir. Genel olarak temeli kayan kipli, geriadımlı, adaptif v.b. kontrol yöntemlerine dayanan yeni metodlar önerilmesine karşın, birleşik olarak güdüm ve kontrol yöntemini ele alan adaptif blok dinamik yüzey kontrolü [1] ve durumlara bağlı Ricatti denklemlerini genişletilmiş bir biçimde ele alan çalışma [2], diğerlerinden farklı olarak bütüncül bir şekilde tüm dinamikleri aynı anda ele alarak otopilot yapısı önermiştir. Bu çalışmada tercih edilen YDK yöntemi ise doğrusal olmayan dinamik sistemleri kontrol etmek için açık çevrim dinamiği tersleyip(NDI) nominal bir komut oluşturup modelleme, takip hatalarını ve çeşitli bozucu etkileri ZDL kapalı çevrim hata dinamiği ile kompanze eden bir yapıdadır. Anlık değişen durumlar genel olarak yörünge diye ifade edilir. Kontrol edilen herbir yörünge etrafında sistem lineer hale getirilir. Yörünge etrafında doğrusallaştırılan hata dinamiği, tasarımcı tarafından belirlenen kriterlere uygun özdeğerlere sahip lineer model ile eşittir. YDK çok farklı sistemlere uygulanmıştır [3, 4, 5].

Bu çalışmada lineer kontrol yöntemleri ve YDK yöntemi ile örnek bir füze üzerinde otopilot tasarımları bütünüyle gerçekleştirilip bir takım koşullar ve belirsizlikler altında performans ve gürbüzlük kıyaslamaları adım adım yapılmaktadır.

2. Lineer Otopilot Tasarımı

Düz dünya modeli kabul edilmiş olup yeryüzü üzerindeki kuzey-doğu-aşağı yönlü $\mathcal{F_I}$ eksen takımı sabittir, Euler açıları buna göre belirlenir. Füze ağırlık merkezinde çakılı $\mathcal{F_B}$ ve göreceli rüzgar hızına göre tanımlı $\mathcal{F_W}$ eksen takımları Şekil 1'de görülmektedir.



Şekil 1: Soldaki eksen takımları, sağdaki $\mathcal{F_B}$'de tanımlı oryantasyon ve değişimleri.

Füze arkadan kanatçıklar ile kontrol edilir. Füzenin orta gövdesinde bulunan kanatlar ise sabit olup kontrol yüzeyi görevi görmez.

Füzeye ait ötelemeli ve döner dinamik denklemler aşağıdaki tanımlanır. Füzenin $\mathcal{F_B}$'da tanımlı olan doğrusal ve açısal hız vektörleri sırasıyla $[u,v,w]$, $[p,q,r]$ gibidir. $\boldsymbol{F_x}$, $\boldsymbol{F_y}$, $\boldsymbol{F_z}$ harici kuvvetleri füze $\mathcal{F_B}$'na indirgenmiş olan yerçekimi, aerodinamik ve itki kuvvetlerinin toplam etkisidir. $\boldsymbol{L_m}$, $\boldsymbol{M_m}$ ve $\boldsymbol{N_m}$ harici momentleri de $\mathcal{F_B}$'na indirgenmiş olan toplam moment etkisidir.

$$\begin{bmatrix}\dot{u}\\ \dot{v}\\ \dot{w}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & r & -q\\ -r & 0 & p\\ q & -p & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\ v\\ w\end{bmatrix} + \frac{1}{m}\begin{bmatrix}\sum F_x\\ \sum F_y\\ \sum F_z\end{bmatrix} \tag{1}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix}\dot{p}\\ \dot{q}\\ \dot{r}\end{bmatrix}}_{\dot{\Omega}} = \underbrace{\begin{bmatrix}\frac{(I_{zz}-I_{yy})qr}{I_{xx}}\\ \frac{(I_{xx}-I_{zz})pr}{I_{yy}}\\ \frac{(I_{yy}-I_{xx})pq}{I_{zz}}\end{bmatrix}}_{b_2} + \underbrace{\begin{bmatrix}\frac{1}{I_{xx}} & 0 & \\ 0 & \frac{1}{I_{yy}} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{I_{zz}}\end{bmatrix}}_{f_2}\underbrace{\begin{bmatrix}\sum L_m\\ \sum M_m\\ \sum N_m\end{bmatrix}}_{T_m} \tag{2}$$

Şekil 1'de görünen $\mathcal{F_B}$ ve $\mathcal{F_W}$ arasındaki kinematik ilişki ve (1) denklemleri kullanılarak $\mathcal{F_W}$'nda tanımlı diferansiyel denklem takımı bulunur. Yuvarlanma açısına ait 1. dereceden diferansiyel (4)'deki gibi yazılabilir.

$$\dot{V}_T = \frac{1}{m}\left[\sum F_x\cos\alpha\cos\beta + \sum F_y\sin\beta + \sum F_z\sin\alpha\cos\beta\right] \tag{3a}$$

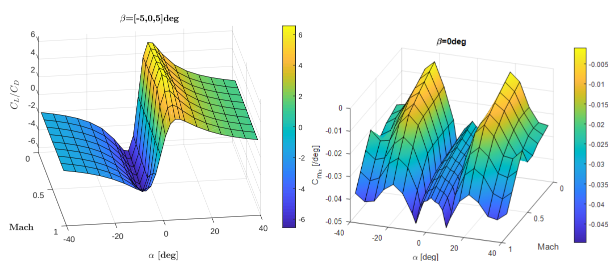
$$\dot{\beta} = \frac{1}{mV_T}\left[-\sum F_x\cos\alpha\sin\beta + \sum F_y\cos\beta - \sum F_z\sin\alpha\sin\beta\right] + (p\sin\alpha - r\cos\alpha) \tag{3b}$$

$$\dot{\alpha} = \frac{1}{mV_T\cos\beta}\left[-\sum F_x\sin\alpha + \sum F_z\cos\alpha\right] + (q - \tan\beta[p\cos\alpha + r\sin\alpha]) \tag{3c}$$

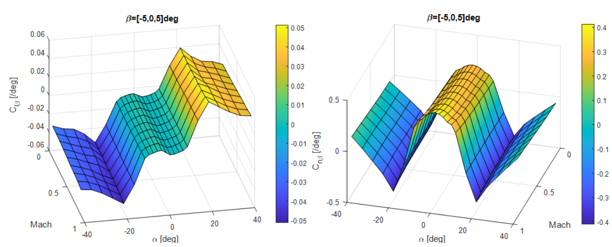
$$\dot{\phi} = p + q\tan\theta\sin\phi + r\tan\theta\cos\phi \tag{4}$$

Harici kuvvet ve momentleri modelleyebilmek için aerodinamik, itki ve yerçekimi modellerine ihtiyaç vardır. Örnek olarak Şekil 2'de $\boldsymbol{C_L/C_D}$ oranı, $\boldsymbol{C_{m\alpha}}$ ve Şekil 3'de $\boldsymbol{C_{l\beta}}$, $\boldsymbol{C_{n\beta}}$ statik kararlılık türevleri görünen karakteristiğe sahip aerodinamik model kullanılır. İtki modeli ise doğrusal olarak kabul edilerek motor ve hız pedalı dinamiği aşağıdaki gibi kullanılır. Azami itki kuvveti 20kN'dur. $\vec{F}_G$ ise $\mathcal{F_I}$'da tanımlı yer çekiminin $\mathcal{F_B}$'ya indirgendiği halidir.

$$T_{motor}(s) = \frac{20000}{s+1}, \quad T_{pedal}(s) = \frac{1}{0.05s+1}, \quad \vec{F}_G = \begin{bmatrix}-mg\sin\theta\\ mg\cos\theta\sin\phi\\ mg\cos\theta\cos\phi\end{bmatrix} \tag{5}$$



Şekil 2: Soldan sağa $\boldsymbol{C_L/C_D}$ oranı, $\boldsymbol{C_{m\alpha}}$ türevinin değişimi.

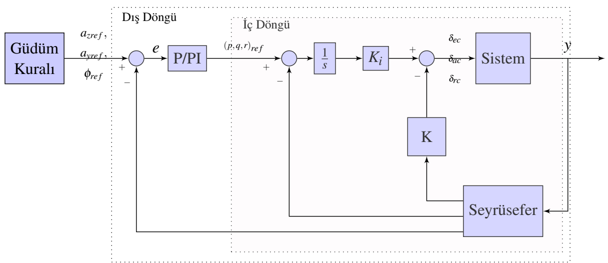


Şekil 3: Soldaki $\boldsymbol{C_{l\beta}}$ ve sağdaki $\boldsymbol{C_{n\beta}}$ türevlerinin farklı uçuş koşulları altında değişimi.

Atmosfer ise irtifaya göre anlık değişen hava yoğunluğu, ses hızı ve yerçekimi ivmesi olacak şekilde modellenir. Otopilotun son noktada eyleyiciye gönderdiği komut 2. dereceden bir kontrol tahrik sistemi ile sürülür. 4 farklı eyleyicinin herbirinin doğal frekansı $\boldsymbol{\omega_{act,n}} = 20Hz$ olup, sönümleme katsayısı ise $\boldsymbol{\zeta_{act}} = \sqrt{2}$'dir.

Sıfır ivme koşulları için diferansiyel denklemler, Newton-Raphson optimizasyon yöntemi ile minimize edilmiştir. Denge noktalarında hesaplanmış olan durum ve kontrol girişleri kullanılarak çoklu Taylor açılımı ile lineer durum-uzay modelleri boylamsal ve yanal dinamiği için hesaplanır.

Şekil 4'de görülen genel otopilot yapısı kullanılır. İç döngüde servo tip1 TDGB yapısı uygulanır. Dış döngüde ise dikey ve yanal ivme kontrolü için oransal tümlevsel PI, yuvarlanma açı kontrolü için ise oransal P kontrolcüsü kullanılır. Dış döngü otopilotları tasarlanırken her birinin birbirinden bağımsız olduğu varsayılır. Dikey ve yanal ivme dinamiği arkadan kanatçıklı mühimmatlar için minimum fazlı değildir. Dolayısıyla ters aşım meydana gelir. Bunu engelleyebilmek için füze boylamsal ekseni üzerinde öyle bir nokta seçilir ki o noktanın ivme dinamiği ters aşım yapmaz. Literatürde yapılan bu manipulasyona "çıkış yeniden tanımlama" denir [6]. $\boldsymbol{x_{perc}}$ mesafesi kadar ötelenmiş ilgili sanal noktanın ivme dinamiği aşağıdaki gibi hesaplanır. İlgili füze için $\boldsymbol{x_{perc}}$ mesafesi $1.05m$ civarı bir değer seçildiğinde baskın sıfırların etkisi yok olmuştur.



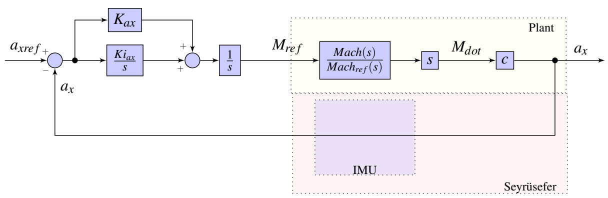
Şekil 4: Genel otopilot yapısı.

$$\vec{a}_{perc} = \vec{a}_{cg} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_{perc} + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r}_{perc} \tag{6}$$

$$\vec{a}_{perc} = \vec{a}_{cg} + \underbrace{\begin{bmatrix} -x_{perc}(q^2+r^2) \\ x_{perc}(\dot{r}+pq) \\ x_{perc}(-\dot{q}+pr) \end{bmatrix}}_{\vec{a}_{trans}} \tag{7}$$

Lineer dikey ve yanal ivme otopilot yapısı yeniden oluşturulurken denklem (7)'daki pq ve pr terimleri katılmadan açık çevrim dinamiği oluşturulmuş olur.

İç döngü otopilotları, yunuslama kanalı bağımsız 1 giriş 1 çıkışlı, yuvarlanma ve yalpalama kanalı ise birleşik 2 giriş 2 çıkışlı olarak, eyleyici dinamiğini içerecek biçimde uygulanmıştır. Güdüm kuralında yer yüzeyine göre dikey ve yanal yönlerde oluşan ivme komutları, $\mathcal{F_B}$'na taşındığında sadece $\mathbf{k}_B$ ve $\mathbf{j}_B$ yönlerine değil, aynı zamanda $\mathbf{i}_B$ doğrultusu için de bir miktar ivme komutu oluşturur. Tam olarak ilgili güdüm kuralını uygulayabilmek için eksenel ivme otopilot yapısı Şekil 5'deki gibi oluşturulmuştur. Bu yapı dış döngü olup iç döngüsünde ise itkili Mach otopilotu yer almaktadır.



Şekil 5: $\boldsymbol{a_x}$ eksenel ivme otopilot yapısı.

3. YDK Otopilot Tasarımı

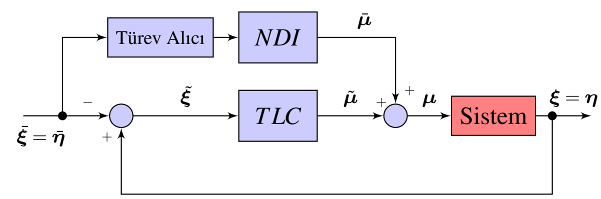
YDK yöntemi, NDI ile sistem doğrusallaştımasını yaklaşık olarak açık çevrim biçiminde gerçekler. Kapalı çevrim biçiminde ise, paralel diferansiyel (PD) spektral teori kullanılarak, ZDL kontrolcüler ile hata dinamiğini kontrol edip, komut takip işini tamamlamayı amaçlar [7]. Böylelikle tablolanmış kazançlar arasında interpolasyon yapmaz ve her koşul için, sahip olduğu kazanç değeri ideal olarak kabul edilir. Lyapunov metodlarına dayandırılarak takip ettiği yörünge etrafında eksponansiyel kararlı olduğu gösterilir [8].

YDK şematik gösterimi Şekil 6'da görülebilir. $\boldsymbol{\eta}(t) \in \mathbb{R}^l$, $\boldsymbol{\mu}(t) \in \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{\xi}(t) \in \mathbb{R}^n$ sırasıyla çıkış, giriş ve durum vektörleri olduğu yerde, zamanla değişen doğrusal olmayan dinamik bir sistem aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\dot{\xi}(t) = f\left(\xi(t),\ \mu(t)\right) \tag{8a}$$

$$\eta(t) = h\left(\xi(t),\ \mu(t)\right) \tag{8b}$$

Nominal durum, çıkış ve kontrol girişi fonksiyonları sırasıyla $\bar{\xi}(t)$, $\bar{\eta}(t)$, $\bar{\mu}(t)$ gibidir. Durum, giriş ve çıkış takip hataları ise sırasıyla $\tilde{\xi}(t)$, $\tilde{\mu}(t)$, $\tilde{\eta}(t)$ diye ifade edilir.



Şekil 6: Genel YDK otopilot şeması.

Eğer doğrusal olmayan $\boldsymbol{f}$ ve $\boldsymbol{h}$ fonksiyonları sürekli olarak $\boldsymbol{\mu}$ ve $\boldsymbol{\xi}$'ye göre türev alınabilir ise takip hata dinamiği aşağıdaki gibi doğrusal olarak ifade edilebilir. $x(t)$, $u(t)$ sırasıyla lineer olmayan durum($\tilde{\xi}(t)$) ve giriş($\tilde{\mu}(t)$) takip hatalarının nominal yörünge boyunca doğrusal yaklaşımlarına eşit denirse,

$$A(t) = \frac{\partial}{\partial \xi} f\left(\xi(t),\ \mu(t)\right)\Big|_{\bar{\xi}(t),\bar{\mu}(t)} \tag{9a}$$

$$B(t) = \frac{\partial}{\partial \mu} f\left(\xi(t),\ \mu(t)\right)\Big|_{\bar{\xi}(t),\bar{\mu}(t)} \tag{9b}$$

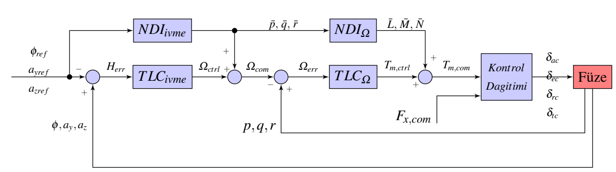
Olduğu yerde, doğrusallaştırılmış ZDL takip hata dinamiği aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \tag{10}$$

PD özdeğer ataması ile ZDL kontrolcüsü tasarlayabilmek için, $A(t)$ ve $B(t)$ matrislerinin kontrol edilebilir formda olması gerekir. Hata durum geribeslemeli ZDL PI yapısı oluşturarak, ilgili hata nominal yörünge etrafında sıfıra indirgenebilir. PI kontrolcü yapısı hata integratörü ile artırılmış bir yapıda kurulur.

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{\xi}}(t) \\ \dot{\tilde{x}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{aug}(t) - B_{aug}(t)K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \int \tilde{x}(t) \\ \tilde{x}(t) \end{bmatrix} \tag{11}$$

$$\dot{\tilde{\xi}}(t) = \tilde{x}(t)$$



Şekil 7: İvme ve yuvarlanma açı kontrollü YDK şeması.

$K_P(t)$ ve $K_I(t)$ kazançları, PD özdeğer atama yöntemi yardımıyla, istenilen kapalı çevrim hata dinamiği ile belirlenir. 2. dereceden hata dinamiğinde

$\rho_{1,2} = -\left(\zeta_{des}\omega_{n,des} \pm j\omega_{n,des}\sqrt{1-\zeta_{des}^2}\right)$ kompleks yarı düzlemin sol tarafında olacak şekilde seçilir. Şekil 7'de görüldüğü üzere 2 döngü ve her döngü için 3 durum kontrol edilmektedir. $i \in [1,2]$, $j \in [1,2,3]$ olduğu yerde, istenilen hata dinamiğine karşı gelen $Ac_{i1} = diag\left\{-\omega_{n,des,ij}^2\right\}$ ve $Ac_{i2} = diag\left\{-2\zeta_{des,ij}\omega_{n,des,ij}^2\right\}$ ile denklem (12)'deki kapalı çevrim dinamiği eşitliğinden her döngüye ait ZDL $K_{Pi}(t)$ ve $K_{Ii}(t)$ kazançları belirlenir.

$$\begin{bmatrix} 0_{3\times3} & I_{3\times3} \\ -B_i(t)K_{Ii}(t) & A_i(t)-B_i(t)K_{Pi}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{3\times3} & I_{3\times3} \\ Ac_{i1} & Ac_{i2} \end{bmatrix} \quad (12)$$

Kontrol kuralı nihai olarak denklem (13)'deki gibi tanımlanır.

$$\tilde{\mu}(t) = -\underbrace{\begin{bmatrix} K_I(t) & K_P(t) \end{bmatrix}}_{K(t)} \begin{bmatrix} \int \tilde{x}(t) \\ \tilde{x}(t) \end{bmatrix} \quad (13)$$

Nominal komut ile birlikte toplam komut $\mu(t) = \tilde{\mu}(t) + \bar{\mu}(t)$ diye bulunur. Açık çevrim kolunda bulunan NDI işlemi nominal komutu elde etmeye yarar. Dinamik terslemede 1. dereceden olan diferansiyel denklem takımları kullanılacağı için, tersleme yapmadan önce kontrol edilen ilgili durumun 1. dereceden türevini alacak sözde diferansiyel alıcı yaklaşımı kullanılır. İlgili yapı aşağıdaki gibidir. İlgili karakteristik tasarımcı tarafından belirlenir.

$$\dot{\bar{\eta}} = \frac{\omega_i^2 s}{s^2 + 2\zeta_i\omega_i s + \omega_i^2}\bar{\eta}, \quad i = \{\eta_1, \eta_2, \eta_3\} \quad (14)$$

Lineer otopilot tarafındaki gibi dış döngüde dikey, yatay ve yuvarlanma açı kontrolü, iç döngüde ise açısal hızların kontrolü olacak şekilde Şekil 7'de oluşturulmuş otopilot yapısı kullanılır. Dış döngüden iç döngüye geçiş yapabilmek için ivme dinamiğinin 1. dereceden diferansiyel denklemini türetmek gerekir. Bunun için füzeye etkiyen harici kuvvet ve momentlerin 1. dereceden türevi alınarak ilerlenir (15). $\mathcal{P}$ kuvvet veya moment olup serbestlik derecesine göre $i = \{X, Y, Z, L, M, N\}$ sembollerinden birisini alır.

$$\Sigma\dot{\mathcal{P}}_i = \mathcal{Q}S\left(C_{i\alpha}\dot{\alpha} + C_{i\beta}\dot{\beta} + C_{i\delta_a}\dot{\delta}_a + C_{i\delta_e}\dot{\delta}_e + C_{i\delta_r}\dot{\delta}_r\right) + \mathcal{Q}S\left(\frac{2}{V_T}C_i\dot{V}_T\right) \quad (15)$$

Füze ağırlık merkezinde tanımlı ivme dinamiği minimum fazlı olmadığı için denklem (6), (7)'de bahsedilen manipulasyon burada da aynı şekilde kullanılır. Denklem (4)'ün birleşimi ile (16) hesaplanır. Lineer olmayan diferansiyel denklem takımları afin formatta kaldığı sürece lineer kontrolde yapılan ihmaller burada gerçekleştirilmez. NDI_{ivme}'ye ait (18) nominal komut , (16) ve (17)'nin yardımıyla bulunur. 1. döngüye ait ZDL kazançlar (19)'in yardımıyla hesaplanır. Denklem (20)'de görünen iç döngüye ait nominal moment komutu ve ZDL kazançların içeriği (21), (2)'nin yardımıyla bulunur.

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{a}_y \\ \dot{a}_z \end{bmatrix} =\ & \frac{\mathcal{Q}S}{mV_T} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2C_Y & C_{y\alpha} & C_{y\beta} \\ 2C_Z & C_{z\alpha} & C_{z\beta} \end{bmatrix}}_{M_0} \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta & \sin\beta & \sin\alpha\cos\beta \\ -\sin\alpha/\cos\beta & 0 & \cos\alpha/\cos\beta \\ -\cos\alpha\sin\beta & \cos\beta & -\sin\alpha\sin\beta \end{bmatrix}}_{M_1} \begin{bmatrix} \phi \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} + \\
& \left(\frac{\mathcal{Q}S}{m} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2C_Y & C_{y\alpha} & C_{y\beta} \\ 2C_Z & C_{z\alpha} & C_{z\beta} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\cos\alpha\tan\beta & 1 & -\sin\alpha\tan\beta \\ \sin\alpha & 0 & -\cos\alpha \end{bmatrix}}_{M_2} + \right. \\
& \left. \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \sin\phi\tan\theta & \cos\phi\tan\theta \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{M_3} \right) \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} + \frac{\mathcal{Q}S}{m} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ C_{y\delta_a} & C_{y\delta_e} & C_{y\delta_r} \\ C_{z\delta_a} & C_{z\delta_e} & C_{z\delta_r} \end{bmatrix}}_{M_4} \begin{bmatrix} \dot{\delta}_a \\ \dot{\delta}_e \\ \dot{\delta}_r \end{bmatrix}
\end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 0 \\ \dot{a}_{ytrans} \\ \dot{a}_{ztrans} \end{bmatrix} =\ & x_{perc}\left(\frac{\mathcal{Q}S}{V_T} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{2C_N d}{I_{zz}} & \frac{C_{n\alpha} d}{I_{zz}} & \frac{C_{n\beta} d}{I_{zz}} \\ -\frac{2C_M l}{I_{yy}} & -\frac{C_{m\alpha} l}{I_{yy}} & -\frac{C_{m\beta} l}{I_{yy}} \end{bmatrix}}_{M_5} \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta & \sin\beta & \sin\alpha\cos\beta \\ -\sin\alpha/\cos\beta & 0 & \cos\alpha/\cos\beta \\ -\cos\alpha\sin\beta & \cos\beta & -\sin\alpha\sin\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} + \right. \\
& \mathcal{Q}S \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{2C_N d}{I_{zz}} & \frac{C_{n\alpha} d}{I_{zz}} & \frac{C_{n\beta} d}{I_{zz}} \\ -\frac{2C_M l}{I_{yy}} & -\frac{C_{m\alpha} l}{I_{yy}} & -\frac{C_{m\beta} l}{I_{yy}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\cos\alpha\tan\beta & 1 & -\sin\alpha\tan\beta \\ \sin\alpha & 0 & -\cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \\
& \left. + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{I_{xx}M}{I_{yy}I_{zz}} & \frac{L}{I_{zz}} & 0 \\ \frac{I_{xx}N}{I_{yy}I_{zz}} & 0 & \frac{L}{I_{yy}} \end{bmatrix}}_{M_6} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} + \mathcal{Q}S \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{C_{n\delta_a d}}{I_{zz}} & 0 & \frac{C_{n\delta_r d}}{I_{zz}} \\ 0 & -\frac{C_{m\delta_e l}}{I_{yy}} & 0 \end{bmatrix}}_{M_7} \begin{bmatrix} \dot{\delta}_a \\ \dot{\delta}_e \\ \dot{\delta}_r \end{bmatrix} \right)
\end{aligned} \quad (17)$$

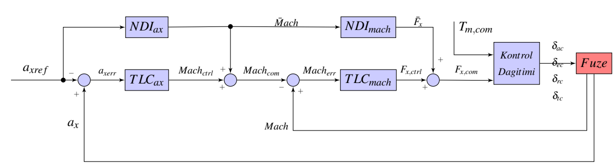
$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \bar{p} \\ \bar{q} \\ \bar{r} \end{bmatrix} =\ & \left[\frac{\mathcal{Q}S}{m}M_0M_2 + M_3 + x_{perc}(\mathcal{Q}SM_5M_2 + M_6)\right]^{-1} \left[\begin{bmatrix} \dot{\bar{\phi}} \\ \dot{\bar{a}}_y \\ \dot{\bar{a}}_z \end{bmatrix} - \right. \\
& \left. \left(\frac{\mathcal{Q}S}{mV_T}M_0M_1 + x_{perc}\frac{\mathcal{Q}S}{V_T}M_5M_1\right) \begin{bmatrix} \bar{\phi} \\ \bar{a}_y \\ \bar{a}_z \end{bmatrix} - \left(\frac{\mathcal{Q}S}{m}M_4 + x_{perc}\mathcal{Q}SM_7\right) \begin{bmatrix} \dot{\bar{\delta}}_a \\ \dot{\bar{\delta}}_e \\ \dot{\bar{\delta}}_r \end{bmatrix} \right]
\end{aligned} \quad (18)$$

$$\left.\begin{aligned}
A_1(t) =\ & \frac{\mathcal{Q}S}{mV_T}M_0M_1 + x_{perc}\frac{\mathcal{Q}S}{V_T}M_5M_1 \\
B_1(t) =\ & \frac{\mathcal{Q}S}{m}M_0M_2 + M_3 + x_{perc}(\mathcal{Q}SM_5M_2 + M_6)
\end{aligned}\right) \quad (19)$$

$$\bar{T}_m = [b_2]^{-1}\left(\dot{\bar{\Omega}} - f_2\right) \quad (20)$$

$$\left.\begin{aligned}
A_2(t) =\ & \begin{bmatrix} 0 & \frac{(I_{zz}-I_{yy})\bar{r}}{I_{xx}} & \frac{(I_{zz}-I_{yy})\bar{q}}{I_{xx}} \\ \frac{(I_{xx}-I_{zz})\bar{r}}{I_{yy}} & 0 & \frac{(I_{xx}-I_{zz})\bar{p}}{I_{yy}} \\ \frac{(I_{yy}-I_{xx})\bar{q}}{I_{zz}} & \frac{(I_{yy}-I_{xx})\bar{p}}{I_{zz}} & 0 \end{bmatrix} \\
B_2(t) =\ & f_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{I_{xx}} & 0 & \\ 0 & \frac{1}{I_{yy}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_{zz}} \end{bmatrix}
\end{aligned}\right) \quad (21)$$

Doğru bir kıyas için, lineer otopilotta olduğu gibi $\boldsymbol{a_x}$ ve Mach kontrolcüsünü YDK için de hazırlamak gerekir. Hız bileşeni ivme dinamiğinde doğrusallığı bozacak şekilde yer aldığı için, 4. bir durum olarak $\boldsymbol{a_x}$ dinamiği Şekil 7'de görünen dış döngüye direk olarak eklenemedi. Bunun yerine denklem (1)'in eksenel hız dinamiği kullanılarak $\boldsymbol{a_x}$'in 1. dereceden türevi (22)'deki gibi hesaplanır. c ses hızı olup u gövde hızı ile cM_{ach} eşitliği varsayımı ile ilerlenmiştir. Aynı şekilde M_{ach}'a ait 1. dereceden diferansiyel, $M_{ach} = V_T/c$ eşitliği kullanılarak denklem (3a)'nın yardımıyla bulunmuştur. a_x döngüsünden M_{ach} döngüsüne geçiş yapabilmek için denklem (15)'de görünen türev eşitliğinin içerisine M_{ach}'a ait kısmi türev etkisi de katılmalıdır. Böylelikle Şekil 8'de görünen yapının dış döngüsünde $\boldsymbol{a_x}$, iç döngüsünde de M_{ach} kontrolü olacak şekilde nominal ve hata dinamiğine ait komutlar hesaplanır.



Şekil 8: Eksenel ivme kontrollü YDK şeması.

$$\begin{aligned}
c\ddot{M}_{ach} =\ & \dot{a}_x - cM_{ach}(\sin\alpha\cos\beta\dot{q} - \sin\beta\dot{r}) + \\
& c(r\sin\beta - q\sin\alpha\cos\beta)\dot{M}_{ach} - \\
& cM_{ach}q\cos\alpha\cos\beta\dot{\alpha} + \\
& cM_{ach}(r\cos\beta + q\cos\alpha\sin\beta)\dot{\beta}
\end{aligned} \quad (22)$$

$$\dot{a}_x = G_0a_x + G_1M_{ach} + G_2 \quad (23)$$

$$\bar{M}_{ach} = \frac{\dot{a}_x - G_0a_x - G_2}{G_1} \quad (24)$$

$$
\left.\begin{aligned}
A_{ax}(t) \quad = \quad & \Big[mc\left(\bar{r}\sin\bar{\beta}+\bar{q}\left(\cos^2\bar{\alpha}-\frac{\sin 2\bar{\alpha}}{2}-\cos\bar{\beta}\sin\bar{\alpha}\right)\right)+ \\
& \cos^2\bar{\alpha}\cos^2\bar{\beta}\,(C_{xm}\mathcal{Q}S-m\bar{q}c)+ \\
& \cos\bar{\alpha}\cos^2\bar{\beta}\sin\bar{\alpha}\,(C_{zm}\mathcal{Q}S+m\bar{q}c) \\
& C_{ym}\mathcal{Q}S\cos\bar{\alpha}\cos\bar{\beta}\sin\bar{\beta}\Big]\,\frac{1}{mc} \\
B_{ax}(t) \quad = \quad & \Big[-I_{yy}N_m\sin\bar{\beta}+I_{zz}M_m\cos\bar{\beta}\sin\bar{\alpha}+\left(I_{yy}^2-I_{xx}I_{yy}\right)\bar{p}\bar{q}\sin\bar{\beta}+ \\
& \left(\bar{q}^2+\bar{r}^2\right)I_{yy}I_{zz}\cos\bar{\alpha}\cos\bar{\beta}+ \\
& \left(I_{zz}^2-I_{xx}I_{zz}-I_{yy}I_{zz}\right)\bar{p}\bar{r}\cos\bar{\beta}\sin\bar{\alpha}+ \\
& (\bar{r}-\bar{p})\,\bar{q}I_{yy}I_{zz}\cos^2\bar{\alpha}\sin\bar{\beta}- \\
& (\bar{r}+\bar{p})\,\bar{q}I_{yy}I_{zz}\cos\bar{\alpha}\sin\bar{\alpha}\sin\bar{\beta}\Big]\,\frac{c}{I_{yy}I_{zz}}
\end{aligned}\right) \tag{25}
$$

$$
\bar{F}_x = c\left(\frac{\dot{\bar{M}}_{ach}-\frac{\bar{a}_y\sin\bar{\beta}}{c}-\frac{\bar{a}_z\cos\bar{\beta}\sin\bar{\alpha}}{c}}{\cos\bar{\alpha}\cos\bar{\beta}}\right)m \tag{26}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
A_{mach}(t) =& 0 \\
B_{mach}(t) =& \frac{\cos\bar{\alpha}\cos\bar{\beta}}{mc}
\end{aligned}\right) \tag{27}
$$

Nihai olarak YDK ivme yapısının ürettiği komut $T_{m,com}$, YDK eksenel ivme yapısının ürettiği komut $F_{x,com}$ olduğu için denklem (28)'daki kontrol dağıtımı vasıtasıyla füzenin kontrol girişleri hazır edilir.

$$
\begin{bmatrix} \delta_{a,com} \\ \delta_{e,com} \\ \delta_{r,com} \\ \delta_{t,com} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{Q}SdC_{l\delta_a} & 0 & \mathcal{Q}SdC_{l\delta_r} & 0 \\ 0 & \mathcal{Q}SlC_{m\delta_e} & 0 & 0 \\ \mathcal{Q}SdC_{n\delta_a} & 0 & \mathcal{Q}SdC_{n\delta_r} & 0 \\ \mathcal{Q}SC_{x\delta_a} & \mathcal{Q}SC_{x\delta_e} & \mathcal{Q}SC_{x\delta_r} & T_{max} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} L_{m,com}-\mathcal{Q}SdC_{l\beta}\bar{\beta} \\ M_{m,com}-\mathcal{Q}Sl(C_{m0}+C_{m\alpha}\bar{\alpha}) \\ N_{m,com}-\mathcal{Q}SdC_{n\beta}\bar{\beta} \\ F_{x,com}-\mathcal{Q}S\left(C_{x0}+C_{x\alpha}\bar{\alpha}+C_{x\beta}\bar{\beta}\right) \end{bmatrix} \tag{28}
$$

Oluşturulmuş olan YDK kontrol yapısında nihai olarak en önemli kısım sözde türev alıcıya ve hata dinamiğine ait özdeğerleri atamaktır. Nominal koldaki özdeğerler daha hızlı seçilir. 3-4 günlük bir deneme süresi içerisinde Tablo 1 ve 2'de görünen karakteristik seçilerek ilgili füze YDK ile kontrol edilebilir hale gelir. Yapılan bütün bu çalışmaların detayları ilgili referans tezden edinilebilir [9].

Tablo 1: Şekil 7'deki sözde türev alıcı ve hata dinamiğine ait doğal frekanslar ve sönümleme oranları.

	Dış Döngü			İç Döngü		
	ϕ	a_y	a_z	p	q	r
$\omega_{n,des}$	2.3333	1.8333	0.6667	7	5.5	2.0
ζ_{des}	$0.5\sqrt{2}$	$0.25\sqrt{2}$	$0.5\sqrt{2}$	$0.5\sqrt{2}$	$0.5\sqrt{2}$	$0.75\sqrt{2}$
ω_i	4	4	4	10	10	10
ζ_i	$5\sqrt{2}$	$5\sqrt{2}$	$5\sqrt{2}$	$5\sqrt{2}$	$5\sqrt{2}$	$5\sqrt{2}$

Tablo 2: Eksenel ivme ve M_{ach} kontrolü için sözde türev alıcı ve hata dinamiğine ait doğal frekanslar ve sönümleme oranları.

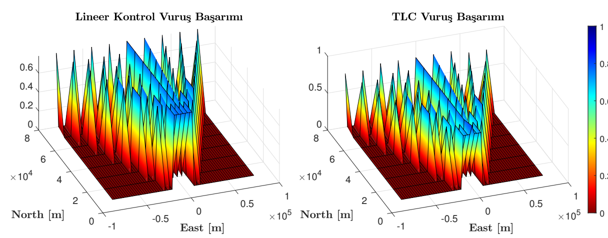
	a_x	M_{ach}
$\omega_{n,des}$	0.5833	1.7500
ζ_{des}	$0.2\sqrt{2}$	$0.2\sqrt{2}$
ω_i	1.3333	4.0
ζ_i	$5\sqrt{2}$	$5\sqrt{2}$

4. Lineer ve YDK Kontrol Yöntemlerinin Kıyaslanması

İlk denemede ideal şartlar altında vuruş başarım kıyası yapılmıştır. Tablo 3'de kuzey-doğu-irtifa bilgisi görünen hareketsiz hedefler için 1296 farklı atış kombinasyonu yapılır. Şekil 9'da her farklı kuzey-doğu konumundaki hedef için 0-1 arası normalleştirilmiş vuruş başarımı görülmektedir. YDK'de %75.6 seviyesinde vuruş başarımı varken, Lineer yöntemde başarım %77.7 seviyesindedir. Bütün denemelerde hedefe 1 metre yarıçap içerisinde yaklaşmış olmak başarılıdır diye kabul edilmiştir.

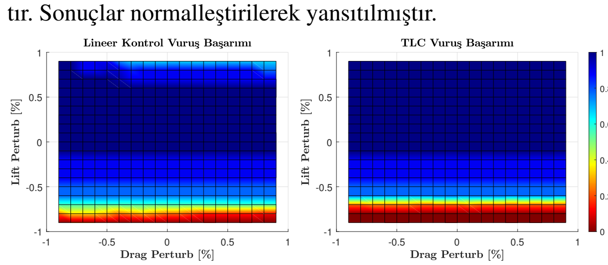
Tablo 3: Vurulacak hedef konumları ve füze ilk hızları.

Hedef Kuzey Konumu X	$\{80,\ 70,\ 60,\ 50,\ 40,\ 30,\ 20,\ 10\}$ km
Hedef Doğu Konumu Y	$\{-X{:}X/4{:}X\}$ km
Hedef İrtifası	$\{0,\ 5000,\ 10000\}$ feet
Füze İlk Hızı	$\{0.4,\ 0.5,\ 0.6,\ 0.7,\ 0.8,\ 0.9\}$ Mach

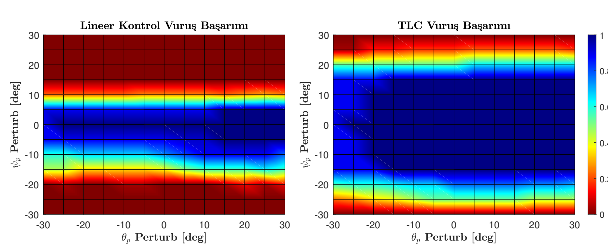


Şekil 9: Vuruş başarım kıyası.

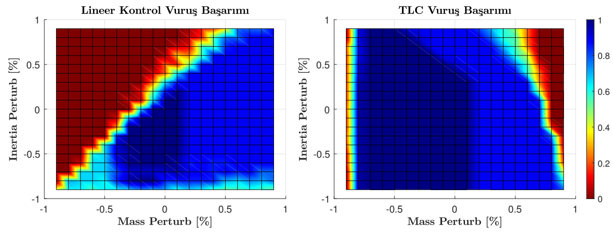
3 farklı model belirsizliği denemesi yapılmıştır. 1. denemede aerodinamik sürüklenme ve kaldırma boyutsuz katsayıları artı ve eksi yönünde %90'a kadar değiştirilerek eklemeli olarak $C_X^{'} = C_X\left(1-\Delta_{drag}\right)$ ve $C_Z^{'} = C_Z\left(1-\Delta_{lift}\right)$ gibi denenmiştir. 2. denemede itki yönünün dikey($\boldsymbol{\theta_p}$) ve yatay($\boldsymbol{\psi_p}$) yönlü 30 dereceye kadar saptığı varsayılarak açı belirsizliği eklenmiştir. 3. denemede ise kütle ve eylemsizlik momentinin %90'a varan belirsizliği eklemeli olarak $m^{'} = m(1+\Delta_m)$ ve $I^{'} = I(1+\Delta_I)$ gibi denenmiştir. Şekil 10, 11 ve 12'de model belirsizlikleri altındaki vuruş başarımı kıyası görülebilir. Her farklı atış denemesinde ilgili belirsizlik simulasyon sonlanana kadar sabit alınmıştır. Sensör ölçümlerine düşük varyanslı beyaz gürültü enjekte edilmiştir. Tablo 4'de denemelerde kullanılmış farklı hedef konumları ve füze iklemeleri yer alır. Dolayısıyla her farklı belirsizlik kombinasyonu için 27 farklı atış denemesi yapılmıştır. Sonuçlar normalleştirilerek yansıtılmıştır.



Şekil 10: Aerodinamik belirsizliği vuruş başarım kıyası.



Şekil 11: İtki belirsizliği vuruş başarım kıyası.

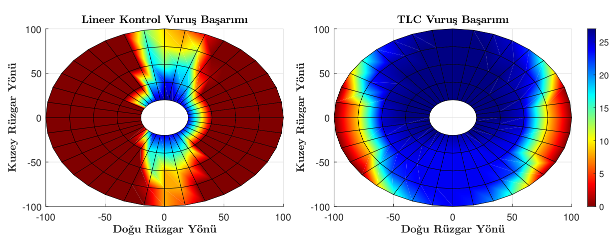


Şekil 12: Kütle/Eylemsizlik belirsizliği vuruş başarım kıyası.

Tablo 4: Belirsizlik denemelerindeki hedef ve füze iklemeleri.

Hedef Kuzey Konumu X	30 km
Hedef Doğu Konumu Y	$\{-15, \quad 0, \quad 15\}$ km
Hedef İrtifası	$\{0, \quad 5000, \quad 10000\}$ feet
Füze İlk Hızı	$\{0.7, \quad 0.8, \quad 0.9\}$ Mach

Hava araçları için olabilecek en büyük bozuculardan biri olan rüzgar $\mathcal{F}_{\mathcal{I}}$ ataletsel eksen takımına göre sabit olacak şekilde farklı yön ve şiddetlerde denenmiştir. Şekil 13'de yarıçap genişliği rüzgar hızını ifade etmektedir, azami 100knot'tur. Rüzgar açıları ise kuzey ve doğu yönlerine göre tam bir 360 derecelik tarama yapmaktadır. Her bir rüzgar yönü ve hızı için 27 farklı deneme yapılmıştır.



Şekil 13: Rüzgar bozucusu altında vuruş başarım kıyası.

Tablo 5: Lineer ve YDK kontrolcü efor kıyası.

	Dış Döngü				İç Döngü			
	ϕ	a_y	a_z	a_x	p	q	r	M_{ach}
Lineer IAE	0.75	1.0	0.41	1.0	1.0	0.04	0.13	0.18
YDK IAE	1.0	0.06	1.0	0.34	0.14	1.0	1.0	1.0

	Sıfıra Göre				İdeal Yörüngeye Göre			
	δ_a[deg]	δ_e[deg]	δ_r[deg]	δ_t[%]	δ_a[deg]	δ_e[deg]	δ_r[deg]	δ_t[%]
Lineer RMS	1.85	2.75	2.15	0.62	2.11	1.33	2.48	0.59
YDK RMS	0.15	2.73	0.98	0.27	0.10	1.15	1.13	0.11

Belirsizlik ve bozucu denemelerinde elde edilen verilerle, Tablo 5'deki lineer ve YDK kontrolcü performansları elde edilmiştir. Mutlak takip hatalarının toplamları normalleştirilerek sunulmuştur. Kontrol girişlerinin RMS değerleri ise 2 farklı şekilde eklenmiştir. Birincide enerjisiz başlangıç koşulu olan sıfıra göre sapmalar hesaplanmış, ikincide ise ideal koşullar altında Tablo 4'deki farklı atışlardan elde edilmiş kontrol girişi değerleri referans kabul edilmiş olup, her kontrol yönteminin kendi referans çizgisinden ne kadar saptığı bulunmuştur.

5. Sonuçlar

Gerçekleştirilen otopilot tasarım adımları teker teker anlatılmıştır. Oransal güdüm kuralına uygun olarak her eksen için tasarım gerçekleştirilmiştir. Fazladan, eksenel ivmenin her iki yöntemle nasıl kontrol edildiği gösterilmiştir. Daha sonra farklı koşullar altında performans ve gürbüzlük kıyası yapılmıştır. Yapılan denemelere bakıldığında ideal koşullarda lineer kontrol daha başarılı iken belirsizlik ve bozucu altında YDK'nin kendi referans çizgisini daha az bozduğu ve dayanıklı olduğu görülmektedir. İtki yönü belirsizliği ve rüzgarlı denemelerde daha yüksek başarım elde edilmiştir. Özellikle yan rüzgarlarda daha yüksek yana kayma açısında dağılmadan kalmıştır. Takip hatalarında lineer yöntem daha başarılı iken, kontrol girişlerine ait enerji maliyetinin YDK yönteminde daha düşük olduğu görülmüştür. Otopilot tasarımındaki zaman maliyeti YDK yönteminde çok daha düşüktür. Lineer otopilotta herbir denge noktasının kazançlarını teker teker hesaplamak zaman aldığı gibi, baskın sıfırların olduğu dinamiklerde tasarımı iyileştirmek daha fazla vakit kaybına sebep vermektedir. Bunun dışında lineer otopilota göre YDK'da kazanç depolama maliyeti düşmesine karşın, ZDL kazançların içerisinde görüldüğü üzere aerodinamik katsayıların tasarım esnasında gömülmesi gerekmektedir. Lineer otopilot kazançları analitik olarak zaman ve frekans kıstaslarına göre tasarlanıyor iken bu durum YDK'da farklı uçuş koşulu denemelerinde elde edilen performans ve dayanıklılığa bakılarak özdeğer atanması şeklinde yapılır.

6. Kaynakça

[1] Hou, M., Liang, X. ve Duan, G., "Adaptive block dynamic surface control for integrated missile guidance and autopilot," *Chinese journal of aeronautics*, 26(3), 741–750, 2013

[2] Çimen, T., "A generic approach to missile autopilot design using state-dependent nonlinear control," *IFAC Proceedings Volumes*, 44(1), 9587–9600, 2011

[3] Adami, Tony M. ve Zhu, J. Jim, "6DOF flight control of fixed-wing aircraft by trajectory linearization," *Proceedings of the 2011 American Control Conference*, 1610–1617, 2011, IEEE

[4] Terupally, Chandrakanth R. ve Zhu, J. Jim ve Williams, Robert L., "Trajectory tracking and stair climbing capability assessment for a skid-steered mobile robot," *2007 American Control Conference*, 2861–2866, 2007, IEEE

[5] Yu, Yushu ve Ding, Xilun and Zhu, J. Jim, "Attitude tracking control of a quadrotor UAV in the exponential coordinates," *Journal of the Franklin Institute*, 350(8), 2044–2068, 2013, Elsevier

[6] McFarland, Michael ve Hoque, Shaheen, "Robustness of a nonlinear missile autopilot designed using dynamic inversion," *AIAA guidance, navigation, and control conference and exhibit*, 3970, 2000

[7] Zhu, J. Jim, "PD-spectral theory for multivariable linear time-varying systems," *Proceedings of the 36th IEEE Conference on Decision and Control*, 4, 3908–3913, 1997, IEEE

[8] Zhu, J. J., Liu, Y., Hang, R., "A spectral lyapunov function for exponentially stable LTV systems," *2007 American Control Conference*, 1146–1153, 2009, IEEE

[9] Keleş, Emre, "Yörüngede Doğrusallaştırılmış Kontrol Metodunun Füzeye Uygulanması ve Klasik Lineer Kontrol Yöntemleri ile Kıyaslanması," YL. tez, 2023, İTÜ