Ters Sarkaç Yukarı Salınım Kontrol Problemine Dual Lyapunov Tabanlı Bir Çözüm

Alkım Gökçen[1], *Ferruh İlhan*[2], *Mahmut Kudeyt*[3], *Savaş Şahin*[1], *Özkan Karabacak*[4]

[1]Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümü
İzmir Katip Çelebi Üniversitesi, Çiğli, İzmir
alkim.gokcen@outlook.com.tr, sahin.savas@yahoo.com

[2]Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümü
Türk-Alman Üniversitesi, Beykoz, İstanbul
ilhan@tau.edu.tr

[3]Çekirdek Program
Kadir Has Üniversitesi, Cibali, İstanbul
mahmut.kudeyt@khas.edu.tr

[4]Mekatronik Mühendisliği Bölümü
Kadir Has Üniversitesi, Cibali, İstanbul
ozkan.karabacak@khas.edu.tr

Özetçe

Bu çalışmada, ters sarkaç yukarı salınım kontrol problemine dual Lyapunov ve polinomyel en iyileme tabanlı yeni bir çözüm önerisi sunulmaktadır. Bilimsel yazında yukarı salınım kontrol probleminin özel bir çözümünün doğruluğu hem klasik Lyapunov hem de dual Lyapunov yöntemleriyle analitik olarak gösterilmiştir. Bu çalışmada, aynı problem karelerin toplamı polinomları ve yeniden biçimlendirme yaklaşımlarıyla bilgisayarla çözülerek doğrusal olmayan durum geri beslemesi fonksiyonun bulunması için yeni bir yol önerilmiştir. Çalışmanın, yeni kısıtlar eklenerek veya daha karmaşık dönel sistemlere uyarlanarak nasıl geliştirilebileceği tartışılmıştır.

Abstract

In this study, a new dual Lyapunov and polynomial optimization-based solution is presented for the inverted pendulum swing-up control problem. The validity of a particular solution to the swing-up control problem has been analytically demonstrated in the literature using both classical Lyapunov and dual Lyapunov methods. In this study, the same problem is computationally solved using the sum of squares polynomials and recasting approaches to find a new nonlinear state feedback function. The discussion involves how the study can be further developed by adding new constraints or adapting it to more complex rotating systems.

1. Giriş

Bir kontrol sisteminin hedeflenen denge noktasına herhangi bir başlangıç koşulu altında yaklaşmasını garanti eden Lyapunov yaklaşımı iki temel soruna sahiptir: İlk olarak, bu yaklaşımla sadece durum uzayının Öklid uzayına eş değer olduğu dinamik sistemlerde global kararlılık doğrudan gösterilebilir [1, 2]. Öte yandan, açısal durum değişkenleri içeren dinamik sistemlerde denge noktasını global kararlı hale getirmek mümkün değildir. İkinci sorun ise, geri besleme tasarım probleminde klasik Lyapunov yöntemiyle ortaya çıkan eşitsizliklerin konveks olmaması [3] ve bu yöntemle sistemin kararlılaştırılması için sistemli bir metodun olmamasıdır.

Rantzer, sonlu boyutlu sistemlerde bir denge noktasının neredeyse global kararlılığını, (Lebesgue ölçüsü sıfır olmayan) çözüm kümeleri boyunca artan bir yoğunluk fonksiyonu yardımıyla karakterize eden dual Lyapunov teoremini, klasik Lyapunov metodunun iki temel sorununa çözüm olma iddiasıyla ortaya atmıştır [4]. Global kararlılık yerine neredeyse global kararlılığı karakterize etmesi dolayısıyla Öklid uzayı haricindeki durum uzayları için de doğrudan uygulanabilen dual Lyapunov yöntemi, geri besleme fonksiyonu bulma problemine de sistematik bir yaklaşım sunmaktadır [3]. Bu teori, süreksiz vektör alanlarına [5], zamanla sürekli olarak değişen sistemlere [6, 7, 8], ayrık zamanlı bağımsız ve özdeş dağılmış rassal süreçlere [9] ve anahtarlamalı sistemlere [10, 11] genelleştirilmiştir. Dual Lyapunov teoresinin polinomyel optimizasyonla kontrol sistemi tasarımında kullanabileceği [3] çalışmasında ortaya konmuştur ve buradan hareketle kareler toplamı (SOS) yöntemiyle dual Lyapunov metodu, uçağın yatış (roll) hareketine ilişkin modelin kararlaştırılmasında [12], robot navigasyonunda [13] ve robotik sistemlerin güvenliğinde [14], füze otopilot sistemlerinin dizaynında [15], eşlenmiş Kuramoto osilatörlerinin kararlılaştırmasında [16] gibi mühendislik problemlerinde de uygulanmıştır.

Dönel bir eksen etrafında hareketli bir sarkaç düzeneğinin dikey konuma getirilmesi olarak tanımlanabilecek yukarı salınım problemi kontrol mühendisliği bilimsel yazımında farklı araştırma alanları tarafından incelenmiştir [17, 18, 19, 20]. Astrom ve Furuta [21] tarafından önerilen ilk enerji tabanlı yukarı salınım yöntemi, sistem enerjisini kararsız dikey denge noktasında sıfıra yakınsatmayı amaçlamaktadır. Ters sarkaç toplam enerjisi üzerinden tanımlanan bir Lyapunov fonksiyonun yukarı salınım stratejisi geliştirmede kullanımı Lozanzo ve arkadaşları tarafından [22] çalışılmıştır. Başlangıç koşullarının sarkaç konumu için yatay eksenin altında kaldığı koşullarda Lyapunov'un ikinci yaklaşımını kullanarak yukarı salınım problemi için doğrusal olmayan durum geri besleme fonksiyonu tasarımı yapılan çalışmada [23], kapalı çevrim sistemin asimtotik kararlığı tartışılmıştır. Rantzer ve Ceragioli [24] farkllı tip kontrolcü yapılarının, dual Lyapunov tabanlı tasarım dahilinde yoğunluk fonksiyonlarının oranları ağırlığında birlikte kullanılabildiğini bir ters sarkaç yukarı salınım problemine uygulayarak göstermiştir.

Bu çalışmada Hamiltonyen sistemlerden olan ters sarkaç düzeneği için dual Lyapunov tabanlı doğrusal olmayan geri besleme fonksiyonu, karelerin toplamı polinomları ve yeniden biçimlendirme yöntemleriyle hesaplanmıştır. Başlangıçta, polinomyel olmayan sistemi polinomyel olarak tekrar ifade etmek için yeniden biçimlendirme yöntemi kullanılmıştır. Ardından, dual Lyapunov koşulunun tanımlanabilmesi adına enerji tabanlı yoğunluk fonksiyonu belirlenmiş, yeniden biçimlendirme kısıtları tanımlanmış ve polinomyel en iyileme yardımı ile ters sarkaç yukarı salınım kontrol problemi için kontrolör hesaplanmıştır. Son olarak elde edilen geri bildirim fonksiyonu kapalıçevrim sistemin benzetim çalışması ile doğrulanmıştır. Ayrıca, önerilen yöntemi doğrular nitelikte olan, hesaplanan geri besleme fonksiyonunun bilimsel yazımda ifade edilen kontrolör ile benzerliği hakkında bilgi verilmiştir. Çalışmanın geri kalan bölümleri sırasıyla üç başlık altında sunulmuştur. İkinci bölümde çalışmada kullanılan teorem ve yakşlaşımlar açıklanmıştır. Dual Lyapunov teoreminin Hamiltonyen sistemler ile birlikte değerlendirilmesi üçüncü bölümde anlatılmıştır. Dördüncü bölümde ters sarkaç sistemi tanıtılmış, dual Lyapunov tabanlı ters sarkaç yukarı salınım için kontrolör tasarımı açıklanmış, ve benzetim ortamında yapılan çalışmalar aktarılmıştır. Beşinci başlıkta ise çalışmanın sonuçları tartışılmıştır.

2. Ön Bilgi: Dual Lyapunov Teoremi, Karelerin Toplamı Polinomları ve Yeniden Biçimlendirme (Recasting)

Çalışmamızdaki kullandığımız teoremler ve yaklaşımlardan bu bölümde kısaca bahsedilecektir.

2.1. Dual Lyapunov Teoremi

Bu bölümde, çalışmamızla alakalı literatürdeki bazı dual Lyapunov yaklaşımları kısaca tanıtılacaktır.

Bir dinamik sistem

$$\dot{x} = f(x), \quad f : X \to X \tag{1}$$

ile modellensin. Sistemin X durum uzayı, ya $\mathbb{R}^n$ ya da çok boyutlu bir torus veya çok boyutlu bir silindir olacaktır.

$X = \mathbb{R}^n$ için, Rantzer'in [4] çalışmasında yer alan dual Lyapunov teoremi aşağıda verilmiştir:

Teorem 1 ([4]) (1) *sisteminde,* f *sürekli ve* $f(0) = 0$ *olsun. Eğer bir pozitif* $\rho \in C^1(\mathbb{R}^n - \{0\}, \mathbb{R})$ *fonksiyonu,* $\rho(x)f(x)/|x|$, $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| > 1\}$ *kümesinde integrallenebilir ve* $[\nabla \cdot (f\rho)(x)] > 0$ *olacak şekilde mevcutsa,* (1) *sisteminin neredeyse her çözümü* 0*'a yakınsar.*

(1) sistemindeki durum uzayı, çok boyutlu torus veya çok boyutlu silindir olsun. Bu tür dönel sistemlerde denge noktasını global kararlı hale getirmek (sürekli durum geri beslemesiyle) mümkün değildir. Bu durumda dönel sistemlerin denge noktasını neredeyse global kararlı hale getirmek ideal olan yaklaşımdır. [1] çalışmasında, sistematik olmayan ek koşullarla birlikte, neredeyse global kararlılaştırma yaklaşımı için de global kararlılık metodunun kullanılabileceği gösterilmiştir.

2.2. Karelerin Toplamı Polinomları Yöntemi

Bir p polinomu eğer $p_1, p_2, \cdots, p_m$ polinomlarının karelerinin toplamı olarak

$$p(x) = \sum_{i=1}^{m} p_i^2(x) \tag{2}$$

şeklinde yazılabiliyorsa, p'ye bir karelerin toplamı (SOS) polinomu denir. Bir polinomun pozitifliğini belirlemek NP-zor bir problemdir [25]. Negatif olmayan polinomlar kümesinde yoğun olduğu düşünülen SOS polinomları [25] ile negatif olmayan polinomlara yaklaşarak, bu zorluk aşılmaya çalışılmaktadır. Bu yaklaşımda, SOS olma koşulu, bir matris eşitsizliğine dönüştürülerek [26], yarı-kesin programlamayla (SDP) polinomyel zamanda, YALMIP, SOSTOOLS gibi paketlerle beraber, SeDuMi, SDTP3 gibi ücretsiz paketler de kullanılarak çözülebilmektedir. Ayrıca, negatif olmayan bir polinomun kompakt bir bölgeye kısıtlanışına, Putinar pozitiflik teoremi sayesinde, SOS polinomları kullanarak [27] yaklaşılabilir.

2.3. Yeniden Biçimlendirme (Recasting)

Yeniden biçimlendirme (recasting), elementer (trigonometrik, logaritma, hiperbolik, üstel) fonksiyonlarla üretilmiş polinomyel olmayan bir sistemi, bir algoritma [28] ile bir rasyonel sisteme dönüştürme yöntemidir [25]. Elementer fonksiyonlarla üretilmiş

$$\dot{x}_i = \sum_j c_j \prod_k f_{ijk}(x), \quad \forall c_j \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \cdots, n, \tag{3}$$

dinamik sistemi verilsin. (3) sistemine, yeniden biçimlendirme yöntemi aşağıdaki gibi uygulanır: (3) sisteminde, $z_i = x_i$, $i = 1, \ldots, n$ değişken dönüşümü yapılır. z_i değişkenleriyle, $f_{ijk}(x)$ fonksiyonlarını direkt olarak yazmak mümkün olmadığından, bu fonksiyonlar için $z_m = f_{ijk}(x)$ değişkenleri tanımlanır. Yeni z_m değişkenlerinin zamana göre türevleri, zincir kuralı yardımıyla hesaplanır. Ardından tüm $f_{ijk}(x)$ yerine sistemde z_m değişkenleri yazılır. Bu işlemler (3) sistemi rasyonel bir sisteme dönüşene kadar devam edilir. Böylece polinomyel olmayan (3) sistemi, rasyonel bir sisteme dönüştürülür. Yeniden biçimlendirilmiş rasyonel sistemin boyutu, (3) orijinal sisteminin boyutundan büyük görünebilir. Bu durumda, dönüşüm sırasında oluşan kısıtlar göz önüne alınırsa, (3) orijinal sisteminin boyutu ile elde edilen rasyonel sistemin boyutunun aynı olduğu görülür [25, 28].

3. Hamiltonyen Sistemlerde Dual Lyapunov Yöntemi

Hamiltonyen sistemler, enerjinin korunduğu sistemler olarak tanımlanabilir ve bu sistemlerde enerji fonksiyonu, Hamiltonyen $H(q,p)$, sistemin dinamiğini belirler. Burada, q konum değişkenlerini, p ise momentum değişkenlerini temsil eder. Hamiltonyen fonksiyonu verildiğinde dinamik aşağıdaki gibi belirlenir:

$$\dot{\begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_q H \\ \nabla_p H \end{bmatrix} \tag{4}$$

Burada, $\nabla_{q,p}$, q, p değişkenlerine göre gradyenleri temsil etmektedir. Denklemdeki matris ise simplektik matris olarak isimlendirilir.

Eğer Hamiltonyen sistemler için bir yoğunluk fonksiyonu $\rho(q,p)$ tanımlarsak, dual Lyapunov şartı $\nabla \cdot (\rho f)$ özel bir form alır:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\rho f) &= \nabla \cdot \left(\rho \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_q H \\ \nabla_p H \end{bmatrix} \right) && (5) \\ &= \nabla_q \cdot (\rho \nabla_p H) - \nabla_p \cdot (\rho \nabla_q H) && (6) \end{aligned}$$

Diverjans için çarpım kuralını kullandığımızda,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\rho f) &= \nabla_q(\rho) \cdot \nabla_p H + \rho(\nabla_q \cdot \nabla_p H) && (7) \\ & \quad - \nabla_p(\rho) \cdot \nabla_q H - \rho(\nabla_p \cdot \nabla_q H) && (8) \end{aligned}$$

Ek olarak, $\nabla_q \cdot \nabla_p H = \nabla_p \cdot \nabla_q H$ eşitliğinin yardımıyla, eşitliğin son halini elde ederiz:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\rho f) &= \nabla_q(\rho) \cdot \nabla_p H - \nabla_p(\rho) \cdot \nabla_q H && (9) \\ &= \{\rho, H\} && (10) \end{aligned}$$

Burada, $\{A, B\}$ Poisson parantezi olarak isimlendirilir ve aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\{A, B\} = \sum_i \frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i}\frac{\partial B}{\partial q_i} \tag{11}$$

Burada, i sistemin serbestlik derecelerini indisler.

Eğer ρ, H'ın bir fonksiyonu olarak seçilirse, $\{\rho, H\} = 0$ olduğu görünür. Böylece, sistemin dinamiği dual Lyapunov şartında görünmez ve kontrol kuralını hesaplamayı kolaylaştırır. Hamiltonyen sistemlere kontrol girişi u eklendiğinde,

$$\dot{\begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_q H \\ \nabla_p H \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ G(q) \end{bmatrix} u \tag{12}$$

şeklinde sistemin dinamiği tanımlanabilir.

Kontrolümüzün amacını sabit bir enerji değerine taşımak olarak belirleyebiliriz. Böylece, doğal olarak, yoğunluk fonksiyonu Hamiltonyenin bir fonksiyonu olarak seçilebilir. Bu durumda, dual Lyapunov şartı

$$\nabla \cdot (\rho f) = \{\rho, H\} + \nabla_q \cdot (\rho G(q) u) \tag{13}$$

olarak yazılabilir. $\{\rho, H\} = 0$ olduğundan dolayı,

$$\nabla \cdot (\rho f) = \sum_i G_i(q) \frac{\partial (\rho u)}{\partial p_i} \tag{14}$$

olarak basitleşir.

Yoğunluk fonksiyonu basitçe $\rho = \frac{1}{(c-H)^n}$ olarak seçilebilir. Burada, n integrallebilme koşulunu sağlayacak kadar büyük seçilmelidir. Eğer dual Lyapunov şartını sağlayani bir kontrol kuralı u hesaplanırsa, neredeyse tüm başlangıç koşulları için, sistem $H(q,p) = c$ olan değişmez kümeye yakınsayacaktır.

4. Dual Lyapunov Tabanlı Ters Sarkaç Yukarı Salınım Kontrol Tasarımı

Bu bölümde, ters sarkaç yukarı salınım sistemi, kararlılığın incelenebilmesi için ilgili sistem dinamiklerini ifade eden matematiksel model, karelerin toplamı polinomyel en iyileme yöntemi ile dual Lyapunov tabanlı kontrol tasarımı uygulaması anlatılacaktır.

4.1. Ters Sarkaç Sistemi ve Yeniden Biçimlendirme

Bir ters sarkaç sisteminin dinamikleri, sarkaç hızı ve konumunu ifade eden durum denklemleriyle tanımlanabilir:

$$\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \sin x_1 + u \cos x_1 \end{bmatrix} \tag{15}$$

Burada x_1 durum değişkeni açısal sarkaç konumunu, x_2 durum değişkeni sarkacın açısal hızını, ve u ise sistem girişini ifade etmektedir. Sistem dinamikleri incelendiğinde sistemin, $(x_1, x_2) = (0, 0)$ için kararlı denge noktasında olduğu ve $(x_1, x_2) = (\pi, 0)$ için kararsız denge noktasında olduğu görülmektedir. Bu noktalar sırası ile sarkaç kolunun düşey yönde ve dikey yönde olduğu konumlarıdır. Hamiltonyen bir sistem olan ters sarkaç düzeneğinin enerji dinamikleri $E = 0.5\, x_2^2 + \cos x_1 - 1$ şeklinde, kinetik ve potansiyel enerji ifadelerinin toplamından oluşmaktadır [24].

Ters sarkaç yukarı salınım probleminin SOS en iyileme yöntemi ile çözülmesi önerilen bu çalışmada, yeniden biçimlendirme yöntemi kullanılarak ilgili sistem polinomyel vektör alanı olarak tekrar ifade edilmiştir. Bu amaçla, $x_3 = \sin x_1$ ve $x_4 = \cos x_1$ şeklinde iki yeni ifade tanımlanabilir. Böylece, Denklem (15) şu şekilde tekrar yazılabilir:

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= x_2 \\ \dot{x_2} &= x_3 + u\, x_4 \\ \dot{x_3} &= x_2\, x_4 \\ \dot{x_4} &= -x_2\, x_3 \end{aligned} \tag{16}$$

Yeniden biçimlendirme uyguladığımız trigonometrik fonksiyonların kareleri toplamı $\sin^2 x_1 + \cos^2 x_1 = 1$ eşitliğinin korunması gerekmektedir. Bu nedenle, Denklem (16)'ya ek olarak $x_3^2 + x_4^2 - 1 = 0$ eşitlik kısıtı sağlanmalıdır.

4.2. Dual Lyapunov Tabanlı Kontrolör Tasarımı ve Benzetim Sonuçları

Ters sarkaç sisteminin yukarı salınım problemine çözüm olarak SOS en iyileme yöntemi ile dual Lyapunov tabanlı bir doğrusal olmayan durum geri besleme fonksiyonunun hesaplanması önerilmiştir. Üçüncü bölümde anlatıldığı üzere Hamiltonyen bir sistem olan ters sarkaç düzeneği için yoğunluk fonksiyonu enerjinin bir fonksiyonu olarak $\rho = \frac{1}{E^2}$ şeklinde seçilebilir. Böylece en iyileme sonucu olarak hesaplanacak kontrolör, terk sarkaç sisteminin yoğunluk fonksiyonu dinamiklerine uygun olarak enerjinin sıfır olduğu noktaya doğru salınım yapmasını sağlayacaktır. Polinomyel ifadelerin negatif olmama şartlarının arandığı bu çalışmada, eşitlik kısıtlarının SOS şekilde tekrar ifade edilmeleri gerekmektedir. Sağlanması gereken eşitlik kısıtı $h(x) = x_3^2 + x_4^2 - 1 = 0$ şeklinde tanımlanırsa, bir SOS polinomu $g(x)$ şu şekilde tanımlanabilir:

$$g(x) = h(x)\, s(x) \tag{17}$$

Burada $g(x)$ polinomunun SOS olma durumu, $s(x)$ olarak seçilecek polinomun SOS olması ile sağlanabilir. Böylece, $g(x) \geq 0$ şartının aranması durumunda, $h(x) = 0$ iken $g(x) = 0$ özelliğinin korunması ile, eşitlik kısıtı SOS en iyileme çalışmasında kullanılabilir [25]. YALMIP ve SeDuMi SOS en iyileme kütüphaneleri ile yapılan bu çalışmada kontrolörün hesaplandığı SOS programı Algoritma 1'de verildiği gibidir [29]. İlgili SOS programı MATLAB ortamında koşturulmuş ve u durum geri besleme fonksiyonu şu şekilde hesaplanmıştır:

Algoritma 1 SOS programı.

1: Tanımla: $x = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$
2: Tanımla: $F(x)$ ▷ Denklem (16)
3: Tanımla: $E, E^2, \rho = 1/E^2$ ▷ Enerji ve Yoğunluk
4: Tanımla: u, n ▷ Kontrolör ve derecesi seçilir
5: Hesapla: $\nabla \cdot (\rho\, f)$ ▷ Denklem (3)
6: Tanımla: $h(x) = x_3^2 + x_4^2 - 1$ ▷ Eşitlik kısıtı
7: Tanımla: $s(x), n$ dereceli
8: Hesapla: $g(x) = h(x)\, s(x)$
9: Tanımla: $div = sos(\nabla \cdot (\rho\, f) - g)$ ▷ SOS olma şartı
10: Tanımla: $params = [u, s]$ ▷ Aranacak polinomlar
11: Çağır : solvesos(div, params)
12: solvesos() komutu ile şartları sağlayan u ve s polinomlarını hesaplanır.
13: Hesaplanan u fonksiyonunu, kapalı çevrim sistemin benzetimi için kullan.

$$\begin{gathered} u(x) = -0.01\, x_2 \ + 0.41\, x_2\, x_4 + \\ 0.01\, x_2\, x_3^2 \ - 0.34\, x_2\, x_4^2 \ - 0.18\, x_2^3\, x_4 - \\ 0.06\, x_2\, x_3^2\, x_4 \ - 0.06\, x_2\, x_4^3 \end{gathered} \tag{18}$$

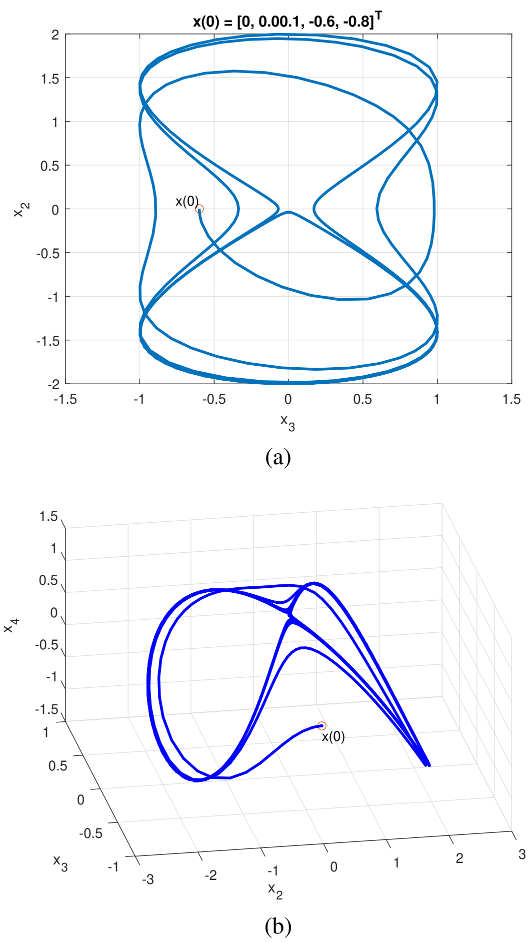
Hesaplanan fonksiyon katsayıları virgülden sonra iki basamak çözünürlükle verilmiş olup, benzetim çalışmalarında da bu formu ile kapalı çevrim sistemin davranışını incelemek için MATLAB ortamında kullanılmıştır . Sarkaç açısal hızını ifade eden x_2, sarkacın yatay ve dikey eksen üzerinde konumunu ifade eden x_3 ve x_4 durum değişkenlerinin birbirlerine göre değişimlerinin incelendiği faz portreleri paylaşılmıştır (Şekil 1). Benzetim için başlangıç koşulları $x(0) = [0, 0.001, -0.6, -0.8]^T$ olarak seçilmiş ve 100 saniyelik bir süre için veri toplanmıştır.

Yukarıda hesaplanan kontrol sinyali, $x_3 = \sin x_1$ ve $x_4 = \cos x_1$ olduğunu göz önüne alarak ve trigonometrik eşitlikleri kullanarak basitleştirilebilir ve aşağıdaki gibi verilebilir:

$$u(x) = -0.35 x_2 \cos x_1 (0.51 x_2^2 + \cos x_1 - 1) \tag{19}$$

$$\simeq -x_2 \cos x_1 E \tag{20}$$

Burada SOS ile numerik olarak hesaplanan kontrol sinyalinin, [24]'de önerilen yapıya yakın olduğu gözlemlenebilir.



Şekil 1: (a) x_2 ve x_3 durum değişkenleri için faz portresi. (b) Üç boyutlu faz portresi.

5. Sonuçlar

Polinomyel en iyileme yöntemi kullanılarak dual Lyapunov kararlılık şartının ters sarkaç yukarı salınım problemine uyarlandığı bu çalışmada, doğrusal olmayan durum geri besleme fonksiyonunun hesaplanması için yeniden biçimlendirme ve SDP tabanlı bir yaklaşım önerilmiştir. Çalışmanın sonucunda dual Lyapunov kararlılığın polinomyel olmayan sistemlere uyarlanabilirliği, negatif olmayan polinomyel şartların SOS programlama ile tanımlanabildiği ve doğrusal olmayan sistemlerin kararlılık analizinin yapılabildiği gösterilmiştir. Önerilen yöntemin elde edilen sonuçlar ışığında, daha karmaşık sistemlerin kararlılık analizinin yapılabilmesi ve kontrolü gelecek çalışmalarda göz önüne alınacaktır. Geri besleme fonksiyonunun hesaplanma yönteminin bir polinomyel eşitsizlik sisteminin çözümüne indirgemesi ile başka amaç ölçütlerinin de tasarıma eklenmesi prensipte mümkündür ve gelecekte üzerinde çalışılabilecek konular arasındadır.

6. Teşekkür

Dual Lyapunov yönteminin ters sarkaç yukarı salınım problemine uygulanabilirliğine dikkatimizi çeken Prof. Dr. Zafer Bingül'e teşekkür ederiz. Bu çalışma TUBITAK 122E522 nolu proje tarafından desteklenmiştir.

7. Kaynakça

[1] David Angeli, "An almost global notion of input-to-state stability," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 49, no. 6, pp. 866–874, 2004.

[2] Daniel E Koditschek, "The application of total energy as a lyapunov function for mechanical control systems," *Contemporary mathematics*, vol. 97, pp. 131, 1989.

[3] Stephen Prajna, Pablo A Parrilo, and Anders Rantzer, "Nonlinear control synthesis by convex optimization," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 49, no. 2, pp. 310–314, 2004.

[4] Anders Rantzer, "A dual to Lyapunov's stability theorem," *Systems and Control Letters*, vol. 42, no. 3, pp. 161–168, 2001.

[5] Izumi Masubuchi and Yuzo Ohta, "Analysis of almost-everywhere stability of a class of discontinuous systems via lyapunov densities," in *2016 European Control Conference (ECC)*. IEEE, 2016, pp. 567–574.

[6] Izumi Masubuchi and Takahiro Kikuchi, "Lyapunov density criteria for time-varying and periodically time-varying nonlinear systems with converse results," *SIAM Journal on Control and Optimization*, vol. 59, no. 1, pp. 223–241, 2021.

[7] Izumi Masubuchi and Takahiro Kikuchi, "Lyapunov density for almost attraction of nonlinear time-varying systems: A condition without assuming local stability," in *2017 25th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED)*. IEEE, 2017, pp. 169–173.

[8] Pablo Monzón, "Almost global stability of time-varying systems," in *Proceedings of the Congresso Brasileiro de Automatica*, 2006, pp. 198–201.

[9] Umesh Vaidya, "Stochastic stability analysis of discrete-time system using lyapunov measure," in *2015 American Control Conference (ACC)*. IEEE, 2015, pp. 4646–4651.

[10] Ayşegül Kıvılcım, Özkan Karabacak, and Rafael Wisniewski, "Almost global stability of nonlinear switched system with stable and unstable subsystems," in *2020 59th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*. IEEE, 2020, pp. 3285–3290.

[11] Ayşegül Kıvılcım, Özkan Karabacak, and Rafael Wisniewski, "Almost global stability of nonlinear switched systems with mode-dependent and edge-dependent average dwell time," *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, vol. 41, pp. 101052, 2021.

[12] Sajjad Pak Khesal and Iman Mohammadzaman, "Nonlinear robust roll autopilot design using sum-of-squares optimization," *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, vol. 140, no. 11, pp. 111005, 2018.

[13] Umesh Vaidya, "Optimal motion planning using navigation measure," *International Journal of Control*, vol. 91, no. 5, pp. 989–998, 2018.

[14] Yuxiao Chen, Andrew W Singletary, and Aaron D Ames, "Density functions for guaranteed safety on robotic systems," in *2020 American Control Conference (ACC)*. IEEE, 2020, pp. 3199–3204.

[15] Min-Won Seo, Hyuck-Hoon Kwon, and Han-Lim Choi, "Nonlinear missile autopilot design using a density function-based sum-of-squares optimization approach," in *2015 IEEE Conference on Control Applications (CCA)*. IEEE, 2015, pp. 947–952.

[16] Mahmut Kudeyt, Aysegül Kivilcim, Elif Köksal Ersöz, Ferruh Ilhan, and Özkan Karabacak, "Certification of almost global phase synchronization of coupled oscillators," *Chaos, Solitons & Fractals*, 2023.

[17] Olivier Sprangers, Robert Babuška, Subramanya P Nageshrao, and Gabriel AD Lopes, "Reinforcement learning for port-hamiltonian systems," *IEEE transactions on cybernetics*, vol. 45, no. 5, pp. 1017–1027, 2014.

[18] Ngo Phong Nguyen, Hyondong Oh, Yoonsoo Kim, and Jun Moon, "A nonlinear hybrid controller for swinging-up and stabilizing the rotary inverted pendulum," *Nonlinear Dynamics*, vol. 104, pp. 1117–1137, 2021.

[19] Nenad Muskinja and Boris Tovornik, "Swinging up and stabilization of a real inverted pendulum," *IEEE transactions on industrial electronics*, vol. 53, no. 2, pp. 631–639, 2006.

[20] Jose Aracil, Jose .Á. Acosta, and Francisco Gordillo, "A controller for swinging-up and stabilizing the inverted pendulum," *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 41, no. 2, pp. 7695–7699, 2008, 17th IFAC World Congress.

[21] Karl J. Aström and Katsuhisa Furuta, "Swinging up a pendulum by energy control," *Automatica*, vol. 36, no. 2, pp. 287–295, 2000.

[22] Rogelio Lozano, Isabelle Fantoni, and Dan J Block, "Stabilization of the inverted pendulum around its homoclinic orbit," *Systems & control letters*, vol. 40, no. 3, pp. 197–204, 2000.

[23] Aguilar I Carlos, Gutierrez F Octavio, S Suarez, and C Miguel, "Lyapunov based controller for the inverted pendulum cart system.," *WSEAS Transactions on Circuits and Systems*, vol. 3, no. 10, pp. 2085–2089, 2004.

[24] Anders Rantzer and Francesca Ceragioli, "Smooth blending of nonlinear controllers using density functions," in *2001 European Control Conference (ECC)*. IEEE, 2001, pp. 2851–2853.

[25] Didier Henrion and Andrea Garulli, *Positive polynomials in control*, vol. 312, Springer Science & Business Media, 2005.

[26] Stephen Prajna, Antonis Papachristodoulou, and Pablo A Parrilo, "Introducing sostools: A general purpose sum of squares programming solver," in *Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control, 2002.* IEEE, 2002, vol. 1, pp. 741–746.

[27] Jean Bernard Lasserre, *Moments, positive polynomials and their applications*, vol. 1, World Scientific, 2009.

[28] Michael A Savageau and Eberhard O Voit, "Recasting nonlinear differential equations as s-systems: a canonical nonlinear form," *Mathematical biosciences*, vol. 87, no. 1, pp. 83–115, 1987.

[29] Johan Lofberg, "Yalmip: A toolbox for modeling and optimization in matlab," in *2004 IEEE international conference on robotics and automation (IEEE Cat. No. 04CH37508)*. IEEE, 2004, pp. 284–289.